

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
імені О.М. Бекетова

Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський

**ЗБІРНИК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
Модуль 1**

Навчальний посібник

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2015

УДК 51(075)
ББК 22.11я73-6
К56

Автори:

Коваленко Людмила Борисівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Станішевський Степан Олександрович, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти:

А. І. Колосов, д. фіз.-м. н., проф., зав. кафедри вищої математики
Харківського національного університету міського господарства
імені О. М. Бекетова;

Л. І. Щелкунова, к. фіз.-м. н., доц. кафедри вищої математики
Харківського національного університету будівництва та
архітектури

Рекомендовано до друку

*Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова як навчальний посібник
(протокол № 12 від 04.06.2015 р.)*

Коваленко Л. Б.

К56 Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 :
навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський;
Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків :
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 250 с.

Навчальний посібник побудований за вимогами
кредитно-модульної системи організації навчального процесу та
узгоджений з орієнтовною структурою змісту навчальної
дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-
Трансферною Системою (ECTS).

Рекомендований для практичної та самостійної роботи
студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання за напрямом
підготовки 6.060101 «Будівництво».

**УДК 51(075)
ББК 22.11я73-6**

© Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський, 2015
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015

ПЕРЕДМОВА

Представлений «Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1» для студентів-будівельників є логічним продовженням навчального посібника «Вища математика. Модуль 1»: (авт. Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 256 с.), рекомендованого Вченою радою ХНУМГ ім. О.М. Бекетова (*протокол № 8 від 11.03.2015 р.*)). Разом вони утворюють комплекс по курсу «Вища математика» для студентів 1 курсу, що навчаються за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво».

При підготовці «Збірника тестових завдань» автори намагалися задовольнити сучасним високим вимогам у підготовці спеціалістів з урахуванням обраного студентами фаху.

Збірник містить 9 розділів, в кожному з яких за темами представлені задачі в 30 варіантах. Саме така кількість варіантів обрана з урахуванням того, що наповненість навчальних груп, як правило, не перевищує 30 осіб. Викладач має можливість запропонувати ці завдання як контрольні або самостійні наприкінці кожної з тем для контролю рівня засвоєння вивченого матеріалу. Автори навмисно відійшли від поширеної зараз практики, коли читачеві відразу пропонують варіанти відповідей, одна з яких – вірна. На наш погляд, це звужує саме поняття тесту (“test” – перевірка, випробування), зводячи його до спроби «вгадати» правильну відповідь. Саме тому при підготовці тестових завдань автори віддали перевагу відкритій формі, коли студент сам отримує правильну відповідь у вигляді довільного числа (або виразу), що допускає, в тому числі, й комп’ютерне тестування.

На початку кожного розділу приведений приклад розв’язання типового варіанту з посиланням на формули, розділи, сторінки навчального посібника «Вища математика. Модуль 1».

Особливістю запропонованого збірника є додаток, в якому в конспективній формі представлений весь необхідний для розв’язання завдань теоретичний матеріал.

Всі навчальні посібники, методичні вказівки, які видаються викладачами Харківського національного університету міського господарства ім. О.М. Бекетова, потрапляють в Цифровий репозиторій. Студент має можливість користуватися як паперовою, так і електронною версіями навчальної літератури.

Автори сподіваються, що запропонований «Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1» в комплексі з навчальним посібником «Вища математика. Модуль 1» дозволить підвищити якість навчання та рівень освіти, та стане до нагоди як студентам, так і викладачам.

Тема 1 «Визначники. Матриці»

Приклади розв'язання типового варіанту

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{32} .
Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 1-го рядка;
 - б) за елементами 3-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

Розв'язання: Скористаємося обчислення визначників розкладанням за елементами обраного рядку (стовпця):

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} &= 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} - \\ &- 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 3 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= 5(2 + 16 + 32 + 2 + 16 - 32) + 2(2 - 16 + 48 - 2 + 24 - \\ &- 32) - 3(16 + 1 + 12 + 8 - 24 + 1) = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 24 + 3 \cdot 14 = \\ &= 180 + 48 - 42 = 186; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} &= 0 - 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \\ &+ 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 4(20 - 8 - 9 - 6 + 12 + 20) + 1(10 - 4 - 3 - 3 + 4 + 10) - \\ &- 8(20 - 12 + 6 - 9 + 8 - 20) = 4 \cdot 33 + 14 - 8 \cdot (-7) = 186; \end{aligned}$$

в) скористаємося властивістю 7 «Основних властивостей визначників» (см. п.1.2):

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 20 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 13 & -2 \\ 1 & -2 & 12 & 0 \end{vmatrix} = \\
 & \begin{matrix} (-1) \rightarrow \\ 4 \rightarrow \\ (-2) \rightarrow \end{matrix} \\
 & = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -7 & 20 & -7 \\ -1 & 13 & -2 \\ -2 & 12 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 80 + 84 - 182 - 0 - 168) \\
 & = 186.
 \end{aligned}$$

Ми розв'язали задачу трьома різними способами і отримали однаковий результат. Ця самоперевірка надає нам впевненості у правильності відповіді.

Відповідь: $\Delta = 186$.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 3 \\ 3 & 4 & x \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -37.$$

Розв'язання: Розкриємо визначник за правилом Саррюса.

$$4x + 10x + 18 - 24 - 2x^2 - 15 = 37;$$

Ми отримали квадратне рівняння, розв'яжемо його:

$$2x^2 - 14x - 16 = 0;$$

$$x^2 - 7x - 8 = 0;$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 49 + 32 = 81;$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Відповідь: $x_1 = -1; \quad x_2 = 8$.

3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: Для обчислення рангу матриці скористаємося, наприклад, методом відокремлюючи мінорів (визн. 1.17).

Складемо мінор першого порядку:

$$\Delta_1 = |2| \neq 0,$$

він відрізняється від нуля, отже ранг матриці не менше 1.

Складемо мінор другого порядку:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 21 = 21 \neq 0,$$

він відрізняється від нуля, отже ранг матриці не менше 2.

Складемо мінор третього порядку:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 42 + 15 - 0 - 60 + 84 = 81 \neq 0,$$

він відрізняється від нуля, отже ранг матриці не менше 3.

Скласти мінор четвертого порядку неможливо, тому що матриця має розмір $[3 \times 5]$, отже ранг матриці дорівнює трьом.

Відповідь: $\text{rang} A = 3$.

4. Знайти матрицю $A = (2B + C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виконаємо послідовно дії: множення матриці на число, додавання матриць

$$\begin{aligned} 2B + C &= \begin{pmatrix} 8 & -4 & 6 & 14 \\ 4 & 0 & 10 & -12 \\ -2 & 4 & 8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 3 & 11 & 13 \\ 2 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

і множення матриць

$$\begin{aligned}
 (2B + C) \cdot D &= \begin{pmatrix} 11 & 3 & 11 & 13 \\ 2 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 99 + 3 + 0 - 52 & 33 + 6 - 55 + 13 \\ 18 + 4 + 0 + 16 & 6 + 8 - 20 - 4 \\ 0 - 1 + 0 - 40 & 0 - 2 - 55 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & -3 \\ 38 & -10 \\ -41 & -47 \end{pmatrix}. \\
 \text{Відповідь: } A &= \begin{pmatrix} 50 & -3 \\ 38 & -10 \\ -41 & -47 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Скористаємося схемою знаходження оберненої матриці, запропонованою на у п. 1.3.2:

- обчислимо визначник матриці

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 21 + 0 + 28 - 0 - 9 = 22,$$

отже, матриця не вироджена і обернена існує;

- знаходимо транспоновану матрицю

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

- обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 0) = -9;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 + 7) = -10;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 14 = 26;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(-4 + 2) = 2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 14 = -14;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 21) = -21;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5;$$

- запишемо обернену матрицю за правилом (1.9)

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -10 & 26 & 2 \\ -14 & 21 & 5 \end{pmatrix};$$

- виконаємо перевірку за визначенням 1.15

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -10 & 26 & 2 \\ -14 & 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 24 - 9 + 7 & 18 - 18 + 0 & -12 + 9 + 3 \\ -40 + 26 + 14 & -30 + 52 + 0 & 20 - 26 + 6 \\ -56 + 21 + 35 & -42 + 42 + 0 & 28 - 21 + 15 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -10 & 26 & 2 \\ -14 & 21 & 5 \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 1

Завдання 1.1

- Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -7 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 9 & -4 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{32} . Обчислити визначник, розкриваючи його
 - за елементами 2-го рядка;
 - за елементами 4-го стовпця;
 - попередньо отримав нулі у 4-му рядку.

- Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} x & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8$.
- Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -7 & 6 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -6 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ -5 & 7 & 11 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Знайти матрицю $A = (5B - 4C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 6 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 7 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -7 \\ 1 & 11 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.2

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -6 & -2 \\ -3 & 9 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$
 Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{21} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 3-го рядка;
 - б) за елементами 1-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ -4 & x & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -68.$$
3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 13 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 7 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (6C + 2D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 5 & 6 & -1 \\ -4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & -5 \\ 4 & 2 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.3

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 & 12 \\ 2 & 0 & -6 & -3 \\ -5 & 9 & 10 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{41} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 2-го рядка;
 - б) за елементами 4-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ x & 3 & -1 \\ 2 & x & 2 \end{vmatrix} = 84.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -6 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 3 \\ -7 & -8 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 2B + C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 8 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -1 \\ -2 & 3 \\ -1 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.4

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 & -5 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 8 & 9 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{34} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 2-го рядка;
 - б) за елементами 4-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 2 & -5 & x \\ -3 & x & 4 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 11$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C - 5D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 5 & 1 & -8 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ -6 & 0 & 8 & -11 & 2 \\ 1 & 2 & 9 & 5 & 8 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -7 & 4 & 9 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -3 & 8 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.5

1. Дано визначник $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 8 & -6 \\ 4 & -1 & 3 & 11 \\ 5 & 2 & -6 & 7 \end{vmatrix}$ Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{11} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 3-го рядка;
 - б) за елементами 2-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ x & 7 & 2 \\ 0 & x & 4 \end{vmatrix} = -92$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = (3B + 2C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -7 \\ 0 & 4 \\ -4 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 8 & 9 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.6

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 8 & -6 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ 10 & 6 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{41} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 3-го рядка;
 - б) за елементами 4-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ x & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -42.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 3 & 2 \\ - & 1 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -4 & -1 \\ -5 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (2C - 7D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & -2 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 9 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.7

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 9 & 0 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 7 & -9 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{24} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 1-го рядка;
 - б) за елементами 2-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 4-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 1 & -3 & x \\ x & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 125$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 & 6 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = 8B - C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 8 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Ранг матриці.

Завдання 1.8

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} -5 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & 15 \\ -1 & 6 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{31} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 2-го рядка;
б) за елементами 4-го стовпця;
в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & x \\ 2 & x & 5 \end{vmatrix} = 88$.

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & -9 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C + 5D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \\ 4 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & -9 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.9

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 3 & -6 & -2 & 0 \\ -5 & 4 & 1 & -1 \\ 7 & -11 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & -6 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{31} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 4-го рядка;
 - б) за елементами 2-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
- $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & x \\ x & 6 & 1 \end{vmatrix} = -80.$$
3. Знайти ранг матриці A , якщо
- $$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (6C - 7D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 9 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.10

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{34} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 4-го рядка;
 - б) за елементами 3-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} x & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -4 \\ x & 6 & 1 \end{vmatrix} = -80$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 & 1 & 4 & -2 \\ 10 & 3 & -8 & -5 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = (2B + 5C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & -8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & -2 & 7 \\ -1 & -8 & 4 & -5 & -6 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 10 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.11

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 & 8 \\ 9 & -8 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{33} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 2-го рядка;
 - б) за елементами 4-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
- $$\begin{vmatrix} 1 & x & -3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & x \end{vmatrix} = 4.$$
3. Знайти ранг матриці A , якщо
- $$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & -2 & -1 \\ -4 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 6B + C \cdot D$, якщо
- $$B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 2 & -8 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \\ -2 & 5 \\ 6 & 4 \\ 3 & 9 \\ -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.12

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 6 & 5 \\ 1 & -3 & 9 & 2 \\ 7 & 0 & 5 & -6 \\ -5 & 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$
 Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{11} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 3-го рядка;
 - б) за елементами 1-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} x & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & x \end{vmatrix} = 184.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 8 \\ -5 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C - 4D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & 8 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 \\ -5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.13

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 & -5 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 9 & 2 \\ 7 & -6 & -9 & 4 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{22} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 1-го рядка;
 - б) за елементами 4-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} x & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 7 \\ 6 & x & 1 \end{vmatrix} = -14$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & -7 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ -7 & 1 & 5 & -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (3C + 2D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 6 & 7 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.14

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 9 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{44} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 4-го рядка;
 - б) за елементами 3-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 1 & -3 & x \\ 4 & 2 & -2 \\ x & -6 & -1 \end{vmatrix} = -166$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ -5 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = (6B - 4C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 6 & -4 \\ -3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 6 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.15

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 10 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{41} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 3-го рядка;
 - б) за елементами 1-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & x \\ 5 & x & 1 \end{vmatrix} = 40$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & -1 & -4 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = 7B - C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ -5 & 0 \\ 8 & 6 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.16

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -9 & 5 \\ 7 & 1 & 7 & -8 \\ 4 & 8 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{32} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 4-го рядка;
 - б) за елементами 3-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 & 3 \\ x & 2 & -1 \\ 6 & x & 4 \end{vmatrix} = -119.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C + 3D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -6 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \\ -6 & 0 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 9 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 & 3 \\ 4 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -7 & 9 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.17

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 9 \\ -5 & 10 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{22} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 4-го рядка;
 - б) за елементами 3-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & x \\ 1 & -2 & 4 \\ x & -1 & 0 \end{vmatrix} = 99.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 11 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -6 & -1 \\ -5 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (4C - 3D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 8 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 & 1 & 4 \\ 8 & -1 & 6 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.18

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 13 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -6 \\ 6 & 4 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{43} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 3-го рядка;
 - б) за елементами 3-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 2 & x & -2 \\ x & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -26$.

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -4 & -7 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (7B + 2C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 6 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & 1 \\ -5 & 6 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.19

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -9 & 8 \\ 1 & 6 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & -5 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{14} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 1-го рядка;
 - б) за елементами 4-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ x & -4 & 5 \end{vmatrix} = -30$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = 6B + C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 2 & -8 \\ 1 & 4 \\ -5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.20

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -7 & 3 & -4 & 6 \\ -6 & 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$
 Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{41} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 3-го рядка;
 - б) за елементами 2-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 4-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & x & 1 \end{vmatrix} = 27.$$
3. Знайти ранг матриці A , якщо
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & -9 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & -3 & -2 \\ 4 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C - 2D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 8 \\ 6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 9 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & -2 \\ 8 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.21

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 7 \\ 10 & 3 & -8 & 9 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{11} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 4-го рядка;
 - б) за елементами 3-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 1 & 5 & x \\ 2 & x & 3 \end{vmatrix} = 23$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -6 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 9 & 2 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & -3 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = (5B - 2C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \\ -5 & -1 \\ 7 & -2 \\ -6 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.22

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 3 & 10 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \\ 9 & 1 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$
 Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{34} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 1-го рядка;
 - б) за елементами 2-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ -2 & -3 & x \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 66.$$
3. Знайти ранг матриці A , якщо
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (3C + 4D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 2 & -1 \\ -6 & 4 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -7 \\ 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.23

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 6 & 8 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & 0 & 3 \\ 11 & -1 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{44} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 2-го рядка;
 - б) за елементами 3-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 8 & 4 & x \\ 1 & 3 & 2 \\ x & -1 & -3 \end{vmatrix} = -70$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = 6B - C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.24

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 4 & -7 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & -1 & 4 \\ 9 & -9 & -6 & 4 \end{vmatrix}.$$
 Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{14} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 1-го рядка;
 - б) за елементами 2-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & x & 9 \\ x & -1 & 2 \end{vmatrix} = -111.$$
3. Знайти ранг матриці A , якщо
$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \\ -4 & 6 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C + 3$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 4 & 1 & -7 \\ 2 & -3 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -3 & 9 & 2 \\ 7 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.25

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 15 & 2 & 6 \\ 3 & -3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{21} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 4-го рядка;
 - б) за елементами 3-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 5 & -5 & x \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 23$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 9 \\ -1 & 2 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (2C + 5D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -5 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.26

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 & 3 \\ -1 & 6 & -7 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & -5 \\ 10 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{33} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 4-го рядка;
 - б) за елементами 2-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} -1 & -7 & x \\ x & 4 & 2 \\ 8 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -138.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ -8 & 7 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (4B - 3C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 8 \\ 0 & -6 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 2 & 8 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 11 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 10 \\ -6 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.27

1. Дано визначник четвертого порядку:
$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 9 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$
 Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{42} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 1-го рядка;
 - б) за елементами 4-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 2 & x & 1 \\ x & -1 & 5 \end{vmatrix} = -204.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 & 2 \\ 11 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C - 5D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \\ -6 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ -4 & 5 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 8 & -2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & -7 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & -4 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.28

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ -11 & -4 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 6 & -2 \\ 8 & 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{12} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 4-го рядка;
 - б) за елементами 2-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & x \\ 9 & x & 3 \end{vmatrix} = 223$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 & -5 & 3 & 6 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & 2 & 7 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = 7B + C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -7 & -2 \\ 0 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -5 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.29

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 11 \\ 6 & -6 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{32} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 1-го рядка;
 - б) за елементами 2-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 4-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ x & 4 & 2 \\ -1 & 7 & x \end{vmatrix} = -44.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -8 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (3C - 5D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -6 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ -2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 \\ 0 & 13 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.30

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 7 & 9 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \\ -6 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & -4 & -1 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{11} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 4-го рядка;
 - б) за елементами 2-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & x \\ 10 & x & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 110.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ -8 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (2B + 4C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 6 \\ -7 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -9 & 5 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тема 2 «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь»

Приклади розв'язання типового варіанту

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12 & \text{б) матричним методом.} \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases}$$

Розв'язання:

а) розв'яжемо систему за правилами Крамера. Для цього обчислимо визначник системи (1.12):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -36 + 5 - 16 - 6 - 30 - 16 = -99$$

й три допоміжних визначника:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 2 \\ -12 & 3 & -5 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -108 - 15 + 48 + 18 - 90 + 48 = -99,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 4 & -12 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 144 - 45 - 24 + 24 - 45 + 144 = 198,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -12 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -27 + 12 - 72 - 27 - 72 - 12 = -198.$$

За формулами Крамера (1.14) отримаємо результат:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-99}{-99} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{198}{-99} = -2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-198}{-99} = 2.$$

Зробимо перевірку, підставимо отримані значення, наприклад, в перше рівняння системи:

$$3 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 2 = 3 + 2 + 4 = 9; \quad 9 = 9.$$

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$.

б) розв'яжемо систему матричним методом. Випишемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо оберену до A матрицю:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -36 + 5 - 16 - 6 - 30 - 16 = -99,$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 10 = -22,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(4 + 4) = -8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -(-16 + 5) = 11,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 2 = -14,$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -(-15 - 8) = 23,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11,$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 + 1) = 5,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{99} \begin{pmatrix} -22 & -8 & -1 \\ 11 & -14 & 23 \\ -11 & 5 & 13 \end{pmatrix};$$

і скористаємося формулою (1.18):

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{99} \begin{pmatrix} -22 & -8 & -1 \\ 11 & -14 & 23 \\ -11 & 5 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{99} \begin{pmatrix} -198 + 96 + 3 \\ 99 + 168 - 69 \\ -99 - 60 - 39 \end{pmatrix} = -\frac{1}{99} \begin{pmatrix} -99 \\ 198 \\ -198 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Виконаємо перевірку, підставимо отримані значення, наприклад, в перше рівняння системи:

$$3 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 2 = 3 + 2 + 4 = 9; \quad 9 = 9.$$

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 23 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -1 \end{cases}$$

Розв'язання. Для зручності запису скористаємося розширеною матрицею (1.16) і виконаємо елементарні перетворення, а саме: поміняємо місцями перший та другий рядки;

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & -1 & 4 & 23 \\ 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -4 & -1 \end{array} \right) \sim$$

помножимо перший рядок на (-2) , (-5) , (-3) та додамо його до другого, третього, четвертого рядків відповідно;

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & 4 & 23 \\ 5 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-2), (-5), (-3) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \end{smallmatrix}} \sim$$

помножимо другий рядок на $\frac{7}{3}$ та додамо до третього рядка, а четвертий рядок скоротимо на 2;

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 7 & -33 & 11 & -14 \\ 0 & 0 & -16 & 2 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \downarrow \frac{7}{3} \\ :2 \end{smallmatrix}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -\frac{190}{3} & \frac{89}{3} & \frac{77}{3} \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \end{array} \right) \cdot 3 \sim$$

помножимо третій рядок на 3, щоб позбутися знаменників; поміняємо місцями третій та четвертий рядки; помножимо третій рядок на $-\frac{190}{8} = -\frac{95}{4}$ і додамо до четвертого рядка;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -190 & 89 & 77 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -190 & 89 & 77 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \downarrow -\frac{95}{4} \end{smallmatrix}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{261}{4} & \frac{783}{4} \end{array} \right) : \frac{261}{4} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Нагадаємо, що першому стовпцю відповідають коефіцієнти при невідомому x_1 , другому – при x_2 , третьому – при x_3 , четвертому – при x_4 .

Отже, з четвертого рядка розширеної матриці отримаємо невідоме :

$$x_4 = 3.$$

З третього рядка, після підстановки знайденого x_4 обчислимо x_3 :

$$-8x_3 + x_4 = -5; \quad -8x_3 + 3 = -5; \quad -8x_3 = -8; \\ x_3 = 1.$$

З другого, відповідно – x_2 :

$$-3x_2 - 13x_3 + 8x_4 = 17; \quad -3x_2 - 13 \cdot 1 + 8 \cdot 3 = 17; \\ x_2 = -2$$

І, нарешті, x_1 :

$$x_1 - (-2) + 6 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 3; \\ x_1 = 1.$$

Виконаємо перевірку. Для цього підставимо отримані значення невідомих у перше рівняння системи:

$$2 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) - 1 + 4 \cdot 3 = 23; \quad 23 = 23.$$

Ми отримали тотожність.

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = 3$.

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 14x_1 + 9x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання: Для розв'язку однорідних систем будемо посилалися до теореми 1.4.

- а) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 40 + 16 - 3 - 4 - 20 + 24 = 53 \neq 0.$$

Отже, ранг матриці системи дорівнює трьом ($r = n$), а за теоремою 4.1 відповідна однорідна система має лише тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Відповідь: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

б) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -14 & -9 & 7 \end{vmatrix} = 42 - 28 - 180 + 140 + 54 - 28 = 0.$$

Ранг матриці менший 3 (кількості невідомих), тому за умовою теореми 1.4 така система має нетривіальний розв'язок. Виключимо із системи, наприклад, третє рівняння:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Положимо $x_3 = k$, де k - довільне дійсне число. Виразимо x_1 і x_2 через k :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -5k \\ 4x_1 + 2x_2 = -2k \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5k & 1 \\ -2k & 2 \end{vmatrix} = -10k + 2k = -8k;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -5k \\ 4 & -2k \end{vmatrix} = -6k + 20k = 14k.$$

Остаточно маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8k}{2} = -4k;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14k}{2} = 7k.$$

Відповідь: $x_1 = -4k$; $x_2 = 7k$; $x_3 = k$, де $k \in R$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 2**Завдання 2.1**

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 58 & \text{б) матричним методом.} \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 24 \end{cases}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = -10 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = -18 \\ -2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 = 29 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.2

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -48 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 36 & \text{б) матричним методом.} \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 35 \end{cases}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} -8x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 9x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.3

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 7x_3 = -39 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = -27 & \text{б) матричним методом.} \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = -8 \\ -3x_1 + 4x_3 + 2x_4 = -3 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 9 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 7x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 29x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.4

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 7x_3 = 33 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 & \text{б) матричним методом.} \\ -3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = -39 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -18 \\ -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -19 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_4 = -3 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 12x_1 - 6x_2 - 23x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.5

- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 = -20 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -39 & \text{б) матричним методом.} \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -23 \end{cases}$$
- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -20 \\ 3x_1 + 2x_3 + 4x_4 = -9 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = -7 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

- Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 19x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ -16x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.6

- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 19 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 32 & \text{б) матричним методом.} \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -24 \end{cases}$$
- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 35 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

- Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 7x_1 - x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.7

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 1 & \text{б) матричним методом.} \\ 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 51 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -5 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 32 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 5x_4 = -16 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 9x_1 + 9x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.8

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 6 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -43 & \text{б) матричним методом.} \\ -3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 45 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 11 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -8 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -27 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} -3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 29x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.9

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 5x_3 = 13 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 43 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 8 \end{cases}$$
- а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -21 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 12 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 13x_1 - 12x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.10

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = -28 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -4 \end{cases}$$
- а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -13 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 7 \\ 5x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 = -10 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 - x_3 = 0 \\ 9x_1 + 2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -7x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.11

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 22 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -15 \\ x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -33 \end{cases}$$
- а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 15 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 6x_4 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = -33 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 13 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- а)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$
- б)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.12

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + x_3 = -26 \\ x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 35 \\ -3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 30 \end{cases}$$
- а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -16 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- а)
$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$
- б)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 31x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.13

- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 3x_1 - 6x_2 - 8x_3 = -63 & \text{б) матричним методом.} \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 3 \end{cases}$$
- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 19 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -13 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 7 \\ -2x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 = -20 \end{cases}$$
- Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 9x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 13x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.14

- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 7x_3 = 28 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 19 & \text{б) матричним методом.} \\ x_1 + 9x_2 + 5x_3 = -14 \end{cases}$$
- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -17 \end{cases}$$
- Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 - 11x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.15

- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -54 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -28 & \text{б) матричним методом.} \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 23 \end{cases}$$
- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -13 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20 \end{cases}$$
- Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -27x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.16

- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -9 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 15 & \text{б) матричним методом.} \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 27 \end{cases}$$
- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -6 \\ -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = -3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$
- Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.17

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 = -7 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 1 & \text{б) матричним методом.} \\ 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 51 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -5 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 32 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 5x_4 = -16 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ -19x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.18

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 = 24 & \text{б) матричним методом.} \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 20 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -7 \\ -2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -20 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -6 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 15x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.19

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 23 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -36 & \text{б) матричним методом.} \\ 2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -15 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 18 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 4 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 10 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 9x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 23x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.20

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 & \text{б) матричним методом.} \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 23 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 - x_4 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 10 \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 - 3x_4 = -3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -16 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ 8x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 13x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.21

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4x_3 = -6 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 17 & \text{б) матричним методом.} \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -33 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -25 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -x_1 + 26x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.22

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 29 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 28 & \text{б) матричним методом.} \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -25 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 7x_2 - 8x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 16x_1 + 9x_2 - 24x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.23

- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 30 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 19 & \text{б) матричним методом.} \\ 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 17 \end{cases}$$
- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 + 5x_4 = -15 \\ -6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 4 \end{cases}$$

- Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.24

- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - x_3 = 43 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -2 & \text{б) матричним методом.} \\ 5x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$$
- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 12 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -10 \end{cases}$$

- Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 14x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.25

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -10 \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 35 \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = -3 \end{cases}$$
 а) за правилами Крамера;
 б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 21 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -9 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.26

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 9x_3 = -4 \\ x_1 - 6x_2 - 5x_3 = -26 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$
 а) за правилами Крамера;
 б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 17 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 20 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 = 0 \\ 11x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.27

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -7 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -9 & \text{б) матричним методом.} \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 - x_4 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -20 \\ -2x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 19 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 9x_1 - x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.28

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 4x_3 = -2 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 & \text{б) матричним методом.} \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -8 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -15 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.29

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - x_3 = -29 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 & \text{б) матричним методом.} \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -7 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - 9x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 18x_1 + 12x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2.30

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 7x_1 + 3x_2 - x_3 = 26 & \text{б) матричним методом.} \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \\ -3x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -8 \\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = -22 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -8x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 27x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Тема 3 «Вектори»

Приклади розв'язання типового варіанту

1. За даними координатами точок $A(3; -2; 8)$, $B(1; 1; 4)$ і $C(5; 2; -6)$ для зазначених векторів $\vec{a} = 3\vec{BC} - 2\vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{CA}$; $\vec{c} = \vec{CB}$; $\vec{d} = \vec{AB}$ знайти: а) модуль вектора \vec{a} ; б) скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ; в) мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; г) проекцію вектора \vec{c} на вектор \vec{d} .

Розв'язання:

Знайдемо координати векторів:

$$\vec{BC} = (5 - 1; 2 - 1; -6 - 4) = (4; 1; -10);$$

$$\vec{AB} = (1 - 3; 1 - (-2); 4 - 8) = (-2; 3; -4);$$

$$\vec{CA} = (3 - 5; -2 - 2; 8 - (-6)) = (-2; -4; 14);$$

$$\vec{CB} = -\vec{BC} = (-4; -1; 10).$$

Звідси

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (3 \cdot 4 - 2 \cdot (-2); 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3; 3 \cdot (-10) - 2 \cdot (-4)) = \\ &= (12 + 4; 3 - 6; -30 + 8) = (16; -3; -22); \end{aligned}$$

$$\vec{b} = (-2; -4; 14);$$

$$\vec{c} = (-4; -1; 10);$$

$$\vec{d} = (-2; 3; -4).$$

а) знайдемо модуль вектора \vec{a} за формулою (2.2):

$$|\vec{a}| = \sqrt{16^2 + (-3)^2 + (-22)^2} = \sqrt{256 + 9 + 484} = \sqrt{749};$$

б) скалярний та векторний добуток обчислимо відповідно за формулами (2.8), (2.10):

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= 16 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-4) + (-22) \cdot 14 = \\ &= -32 + 12 - 308 = -328; \end{aligned}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 16 & -3 & -22 \\ -2 & -4 & 14 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & -22 \\ -4 & 14 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 16 & -22 \\ -2 & 14 \end{vmatrix} + \\ + \vec{k} \begin{vmatrix} 16 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (-42 - 88)\vec{i} - (224 - 44)\vec{j} + (-64 - 6)\vec{k} = \\ = -130\vec{i} - 180\vec{j} - 70\vec{k};$$

в) мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обчислимо за формулою (2.12):

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} 16 & -3 & -22 \\ -2 & -4 & 14 \\ -4 & -1 & 10 \end{vmatrix} = -640 + 168 - 44 + 352 - 60 + \\ + 224 = 0;$$

г) проекцію вектора \vec{c} на вектор \vec{d} знайдемо за формулою (2.16):

$$\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = \frac{-4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 10 \cdot (-4)}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{8 - 3 - 40}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = -\frac{35}{\sqrt{29}}.$$

2. Довести, що вектори $\vec{a}(1; -2; 1), \vec{b}(5; 4; -1), \vec{c}(3; 1; 1)$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\vec{d}(-2; 0; 2)$ в цьому базисі.

Розв'язання: Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис лише в тому випадку, якщо вони лінійно незалежні. Щоб з'ясувати це, обчислимо визначник, складений з координат векторів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 5 - 12 + 10 + 1 = 14 \neq 0.$$

Цей визначник не дорівнює нулю, звідси прямує, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні та утворюють $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базис. Розклад вектора \vec{d} запишемо у вигляді: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ (за формулою (2.23)), де x, y, z - невідомі числа. Векторне рівняння

перепишемо у вигляді системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими x, y, z :

$$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ 5x + 4y - z = 0 \\ 3x + y + z = 2 \end{cases}.$$

Розв'яжемо цю систему за методом Крамера. Головний визначник ми обчислили раніше, він дорівнює $\Delta = 14$. Допоміжні визначники $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ дорівнюють:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 4 + 0 - 8 - 0 - 2 = -14;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 10 - 0 + 10 + 2 = 28;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 - 10 + 24 + 20 - 0 = 42.$$

За формулами Крамера маємо координати вектора \vec{d} :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-14}{14} = -1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3.$$

Таким чином: $\vec{d} = (-1; 2; 3)$, або $\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

3. Дано вектори $\vec{a}(-1; -4; 2)$, $\vec{b}(3; 2; -4)$, $\vec{c}(2; 0; 5)$.

Знайти: а) скалярний добуток, векторний добуток та модуль векторного добутку двох векторів $4\vec{a}, -3\vec{c}$.

Перевірити їх на ортогональність та колінійність; б) мішаний добуток трьох векторів $-7\vec{a}, 4\vec{b}, 2\vec{c}$ та перевірити їх на компланарність.

а) Знайдемо координати відповідних векторів:

$4\vec{a} = (-4; -16; 8)$ і $-3\vec{c} = (-6; 0; -15)$. Їх скалярний добуток (2.8):

$$(4\vec{a}, -3\vec{c}) = -4 \cdot (-6) + (-16) \cdot 0 + 8 \cdot (-15) = 24 + 0 - 120 = -96.$$

Скалярний добуток заданих векторів не дорівнює нулю, тому вектори **не ортогональні** (2.9).

Знайдемо їх векторний добуток (2.10):

$$\begin{aligned}
 [4\vec{a}, -3\vec{c}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -16 & 8 \\ -6 & 0 & -15 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -16 & 8 \\ 0 & -15 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -6 & -15 \end{vmatrix} + \\
 &+ \vec{k} \begin{vmatrix} -4 & -16 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(240 - 0) - \vec{j}(60 + 48) + \vec{k}(0 - 96) = \\
 &= 240\vec{i} - 108\vec{j} - 96\vec{k}.
 \end{aligned}$$

Модуль векторного добутку

$$\begin{aligned}
 |[4\vec{a}, -3\vec{c}]| &= \sqrt{240^2 + (-108)^2 + (-96)^2} = \\
 &= \sqrt{57600 + 11664 + 9216} = \sqrt{78480} = 12\sqrt{545}.
 \end{aligned}$$

Перевіримо вектори на колінарність за формулою (2.11):

$$\frac{-4}{-6} \neq \frac{-16}{0} \neq \frac{8}{-15},$$

умова колінарності не виконується, тому вони **не колінеарні**.

б) знайдемо координати відповідних векторів:

$$-7\vec{a} = (7; 28; -14), \quad 4\vec{b} = (12; 8; -16), \quad 2\vec{c} = (4; 0; 10). \quad \text{Їх}$$

мішаний добуток обчислимо за формулою (2.12):

$$\begin{aligned}
 (-7\vec{a}, 4\vec{b}, 2\vec{c}) &= \begin{vmatrix} 7 & 28 & -14 \\ 12 & 8 & -16 \\ 4 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 560 - 1792 + 0 + 448 - \\
 &- 3360 - 0 = -4144 \neq 0,
 \end{aligned}$$

мішаний добуток не дорівнює нулю, тому вектори **не компланарні**.

4. Дано три сили $\vec{P}(1; 7; -4)$, $\vec{Q}(-2; 3; 0)$, $\vec{R}(-5; 6; 1)$, прикладені до точки $A(10; -6; 1)$. Обчислити: а) роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка A , рухаючись прямолінійно, перемістилась у точку $B(3; 2; 8)$; б) величину моменту рівнодійної цих сил відносно точки B .

Розв'язання: Знайдемо рівнодійну всіх сил: $\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = (1 - 2 - 5; 7 + 3 + 6; -4 + 0 + 1) = (-6; 16; -3)$ та вектор $\vec{S} = \overline{AB} = (3 - 10; 2 - (-6); 8 - 1) = (-7; 8; 7)$.

а) обчислимо роботу як скалярний добуток векторів сили та переміщення:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = -6 \cdot (-7) + 16 \cdot 8 + (-3) \cdot 7 = 42 + 128 - 21 = 149;$$

б) величину моменту рівнодійної цих сил відносно точки B обчислимо як векторний добуток сили та переміщення:

$$\begin{aligned} \vec{M} = [\vec{F} \cdot \vec{S}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 16 & -3 \\ -7 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 16 & -3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} + \\ &+ \vec{k} \begin{vmatrix} -6 & 16 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = \vec{i}(112 + 24) - \vec{j}(-42 - 21) + \\ &+ \vec{k}(-42 + 112) = 136\vec{i} + 63\vec{j} + 70\vec{k}. \\ |\vec{M}| &= \sqrt{136^2 + 63^2 + 70^2} = \sqrt{18496 + 3969 + 4900} = \sqrt{27365}. \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 3

1. За даними координатами точок A , B і C для зазначених векторів знайти:
 - а) модуль вектора \vec{a} ;
 - б) скалярний та векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} .
 - в) мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
 - г) проекцію вектора \vec{c} на вектор \vec{a} .

№	A	B	C	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}	\vec{d}
1	(5; 4; 4)	(-5; 2; 3)	(4; 2; -5)	$11\vec{AC} - 6\vec{AB}$	\vec{BC}	\vec{AB}	\vec{AC}
2	(6; 5; -4)	(-5; 2; 2)	(3; 2; 2)	$6\vec{AB} - 3\vec{CB}$	\vec{AC}	\vec{AB}	\vec{BC}
3	(2; 4; 3)	(3; 1; -4)	(-1; 2; 2)	$2\vec{BA} + 4\vec{AC}$	\vec{AB}	\vec{AC}	\vec{CB}
4	(-2; -3; 4)	(2; -4; 0)	(1; 4; 5)	$4\vec{AC} - 8\vec{BC}$	\vec{AB}	\vec{CB}	\vec{AC}
5	(2; 4; 6)	(-3; 5; 1)	(4; -5; 4)	$2\vec{BA} - 6\vec{BC}$	\vec{AB}	\vec{CB}	\vec{CA}
6	(-5; 4; 3)	(4; 5; 2)	(2; 7; -4)	$3\vec{BC} + 2\vec{AB}$	\vec{CA}	\vec{AB}	\vec{CB}
7	(3; 5; 4)	(4; 2; -3)	(-2; 4; 7)	$3\vec{BA} - 4\vec{AC}$	\vec{CA}	\vec{CB}	\vec{AC}
8	(-2; 3; -4)	(3; -1; 2)	(4; 2; 4)	$7\vec{AC} + 4\vec{BC}$	\vec{AB}	\vec{AB}	\vec{BC}
9	(3; 4; 1)	(5; -2; 6)	(4; 2; -7)	$5\vec{AB} - 7\vec{AC}$	\vec{BC}	\vec{AC}	\vec{AB}
10	(4; 6; 7)	(2; -4; 1)	(-3; -4; 2)	$5\vec{AB} - 2\vec{AC}$	\vec{BC}	\vec{BA}	\vec{AC}
11	(1; 3; 2)	(-2; 4; 1)	(1; 3; -2)	$2\vec{AB} + 5\vec{BC}$	\vec{AC}	\vec{CA}	\vec{AB}
12	(10; 6; 3)	(-2; 4; 5)	(3; -4; -6)	$5\vec{AC} - 2\vec{CB}$	\vec{AB}	\vec{AC}	\vec{BC}
13	(3; 4; 6)	(-4; 6; 4)	(5; -2; -3)	$4\vec{CA} - 7\vec{BC}$	\vec{BA}	\vec{BC}	\vec{AC}
14	(-3; -5; 6)	(3; 5; -4)	(2; 6; 4)	$4\vec{AC} - 5\vec{BC}$	\vec{AC}	\vec{AB}	\vec{BC}
15	(2; 4; 5)	(2; -1; 3)	(-1; -2; 4)	$3\vec{AB} - 4\vec{AC}$	\vec{BA}	\vec{CB}	\vec{AC}

№	A	B	C	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}	\vec{d}
16	$(-2; -3; 2)$	$(1; 4; 2)$	$(1; 2; -2)$	$2\vec{AC} - 4\vec{BC}$	\vec{CB}	\vec{AB}	\vec{CA}
17	$(-2; 4; -5)$	$(3; 7; 2)$	$(4; 6; -3)$	$9\vec{BA} + 3\vec{BC}$	\vec{CA}	\vec{CB}	\vec{AB}
18	$(6; 4; 5)$	$(-7; 1; 8)$	$(2; -2; 7)$	$5\vec{CB} - 2\vec{AC}$	\vec{AB}	\vec{AC}	\vec{BC}
19	$(-2; -2; 4)$	$(1; 2; 3)$	$(1; 4; 2)$	$2\vec{AC} - 3\vec{AB}$	\vec{CA}	\vec{AB}	\vec{CB}
20	$(0; 2; 5)$	$(2; -3; 4)$	$(3; 2; -5)$	$4\vec{CB} - 3\vec{AB}$	\vec{BA}	\vec{BC}	\vec{AC}
21	$(4; 5; 3)$	$(-2; 3; 4)$	$(5; -6; 2)$	$9\vec{AB} - 4\vec{BC}$	\vec{AC}	\vec{CB}	\vec{BA}
22	$(4; 3; 2)$	$(-4; -3; 5)$	$(6; 4; -3)$	$8\vec{AC} - 5\vec{BC}$	\vec{AB}	\vec{CA}	\vec{CB}
23	$(4; 6; 3)$	$(-5; 2; 6)$	$(4; -4; 3)$	$4\vec{CB} - \vec{AC}$	\vec{CA}	\vec{AB}	\vec{CB}
24	$(2; -4; 3)$	$(-3; -2; 4)$	$(0; 0; -2)$	$3\vec{AC} - 4\vec{CB}$	\vec{CA}	\vec{BA}	\vec{BC}
25	$(3; 2; 3)$	$(-2; 1; 3)$	$(2; -2; 1)$	$4\vec{BC} - 3\vec{AC}$	\vec{AB}	\vec{CB}	\vec{CA}
26	$(-5; -2; 6)$	$(3; 4; 5)$	$(2; -5; 4)$	$8\vec{AC} - 5\vec{BC}$	\vec{CB}	\vec{AB}	\vec{CA}
27	$(1; 3; 2)$	$(-2; 3; -4)$	$(3; 1; -2)$	$2\vec{AB} + 5\vec{CB}$	\vec{BA}	\vec{BC}	\vec{AC}
28	$(-1; -2; 4)$	$(-1; 3; 5)$	$(1; 4; 2)$	$3\vec{AC} - 7\vec{BC}$	\vec{BA}	\vec{CB}	\vec{CA}
29	$(5; 6; 1)$	$(-2; 4; -1)$	$(3; -3; 3)$	$3\vec{AB} - 4\vec{BC}$	\vec{AC}	\vec{BA}	\vec{CB}
30	$(4; 3; -2)$	$(-1; -3; 4)$	$(2; 2; 1)$	$2\vec{CB} - 5\vec{AC}$	\vec{AC}	\vec{AB}	\vec{BC}

2. Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис. Знайти координати вектора \vec{d} в цьому базисі.

№	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}	\vec{d}
1	(11, 1, 2)	(-3, 3, 4)	(-4, -2, 7)	(-5, 11, -15)
2	(4, 5, 1)	(1, 3, 1)	(-3, -6, 7)	(19, 33, 0)
3	(1, 3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	(13, -5, -4)
4	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	(-9, 34, -20)
5	(3, 5, 4)	(-2, 7, -5)	(6, -2, 1)	(6, -9, 22)
6	(3, 1, 2)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	(14, 14, 20)
7	(2, -1, 4)	(-3, 0, -2)	(4, 5, -3)	(0, 11, -14)
8	(0, 2, -3)	(4, -3, -2)	(-5, -4, 0)	(-19, -5, -4)
9	(1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	(-2, 17, 5)
10	(1, 2, 3)	(-5, 3, -1)	(-6, 4, 5)	(-4, 11, 20)
11	(-1, 4, 3)	(3, 2, -4)	(-2, -7, 1)	(6, 20, -3)
12	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	(-16, 33, 13)
13	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	(-12, 14, -31)
14	(9, 5, 3)	(-3, 2, 1)	(4, -7, 4)	(-10, -13, 8)
15	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	(-8, -10, 13)
16	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	(-15, -10, 5)
17	(3, 1, -3)	(-2, 4, 1)	(1, -2, 5)	(1, 12, -20)
18	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	(36, 1, 15)
19	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, -1)	(-5, 11, 1)
20	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3, -1)	(28, -19, -7)
21	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)	(4, -5, -3)	(-3, 2, -3)
22	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)	(-3, 4, 5)	(26, 11, 1)
23	(-2, 5, 1)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)	(-4, 22, -13)
24	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)	(2, -1, 3)	(7, 23, 4)
25	(5, 1, 2)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)	(15, -15, 24)
26	(-2, 1, 3)	(3, -6, 2)	(-5, -3, -1)	(31, -6, 22)
27	(7, 2, 1)	(3, -5, 6)	(-4, 3, -4)	(-1, 18, -16)
28	(5, 7, -2)	(-3, 1, 3)	(1, -4, 6)	(14, 9, -1)
29	(3, 1, 2)	(-7, -2, -4)	(-4, 0, 3)	(16, 6, 15)
30	(6, 1, -3)	(-3, 2, 1)	(-1, -3, 4)	(15, 6, -17)

3. Дано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Знайти: а) скалярний добуток, векторний добуток та модуль векторного добутку двох векторів. Перевірити їх на ортогональність та колінальність; б) мішаний добуток трьох векторів та перевірити їх на компланарність.

№	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}	а)	б)
1	(-9; 5; 5)	(1; -2; 4)	(-5; 10; -2)	$-6\vec{b}; 7\vec{c}$	$-2\vec{a}; 7\vec{b}; 5\vec{c}$
2	(3; -1; 5)	(2; -4; 6)	(1; -2; 3)	$6\vec{b}; 3\vec{c}$	$-3\vec{a}; 4\vec{b}; 5\vec{c}$
3	(-7; 0; 2)	(2; -6; 4)	(1; -3; 2)	$2\vec{a}; -7\vec{c}$	$\vec{a}; -2\vec{b}; -7\vec{c}$
4	(5; -3; 4)	(2; -4; -2)	(3; 5; -7)	$-2\vec{b}; 4\vec{c}$	$\vec{a}; -4\vec{b}; 2\vec{c}$
5	(9; -3; 1)	(-1; -5; 7)	(2; -10; 14)	$-6\vec{a}; 4\vec{c}$	$2\vec{a}; -7\vec{b}; 3\vec{c}$
6	(3; 1; 5)	(2; -4; 8)	(3; 7; -1)	$-9\vec{a}; 4\vec{c}$	$2\vec{a}; -7\vec{b}; 5\vec{c}$
7	(3; 4; 1)	(1; -2; 7)	(3; -6; 21)	$-6\vec{a}; 7\vec{c}$	$2\vec{a}; -3\vec{b}; 4\vec{c}$
8	(-1; 0; 5)	(-3; 2; 2)	(-2; -4; 1)	$7\vec{a}; -3\vec{c}$	$3\vec{a}; -4\vec{b}; 2\vec{c}$
9	(-3; 8; 0)	(2; -2; 3;)	(8; 12; -8)	$3\vec{b}; -8\vec{c}$	$4\vec{a}; -6\vec{b}; 3\vec{c}$
10	(4; 6; -2)	(-2; 3; 1)	(3; -5; 7)	$-7\vec{b}; 6\vec{a}$	$6\vec{a}; 3\vec{b}; 8\vec{c}$
11	(5; -6; 4)	(4; 8; -7)	(0; 3; -4)	$4\vec{b}; \vec{a}$	$5\vec{a}; 3\vec{b}; -4\vec{c}$
12	(4; 1; -3)	(2; 3; -5)	(7; 2; 4)	$3\vec{a}; 5\vec{c}$	$7\vec{a}; -4\vec{b}; 2\vec{c}$
13	(4; -6; 2)	(2; 3; -1)	(-1; 5; -3)	$-4\vec{b}; 11\vec{a}$	$5\vec{a}; 7\vec{b}; 2\vec{c}$
14	(2; -7; 5)	(-1; 2; -6)	(3; 2; -4)	$5\vec{b}; 3\vec{c}$	$-2\vec{a}; 7\vec{b}; 5\vec{c}$
15	(4; 5; -4)	(5; -1; 0)	(2; 4; -3)	$-6\vec{b}; 7\vec{c}$	$-2\vec{a}; 7\vec{b}; 5\vec{c}$
16	(-4; 2; 1)	(3; 5; -2)	(0; 1; 5)	$2\vec{b}; 4\vec{a}$	$-3\vec{a}; 6\vec{b}; -\vec{c}$
17	(4 - 7; 3)	(4; 6; -2)	(6; 9; -3)	$2\vec{b}; \vec{a}$	$-2\vec{a}; \vec{b}; -2\vec{c}$
18	(2; 4; -3)	(5; 1; -2)	(7; 4; -1)	$-6\vec{b}; 7\vec{c}$	$-2\vec{a}; 7\vec{b}; 5\vec{c}$
19	(-3; 2; 7)	(-5; 0; 1)	(6; -4; 1)	$-8\vec{b}; 5\vec{c}$	$-2\vec{a}; \vec{b}; 7\vec{c}$
20	(2; -4; 2)	(7; 3; 0)	(3; -5; 7)	$3\vec{a}; -7\vec{b}$	$\vec{a}; 2\vec{b}; 3\vec{c}$
21	(6; -4; 6)	(9; -6; 9)	(1; 0; -8)	$3\vec{b}; -9\vec{c}$	$-2\vec{a}; 7\vec{b}; 5\vec{c}$
22	(2; 4; -2)	(-9; 0; 2)	(3; 5; -7)	$-5\vec{a}; 4\vec{b}$	$7\vec{a}; 5\vec{b}; -\vec{c}$
23	(3; -1; 2)	(-1; 5; -4)	(6; -2; 4)	$6\vec{a}; -4\vec{c}$	$4\vec{a}; -7\vec{b}; -2\vec{c}$
24	(2; -3; 1)	(0; 1; 4)	(5; 2; -3)	$3\vec{a}; 2\vec{c}$	$\vec{a}; 3\vec{b}; \vec{c}$
25	(4; 2; -3)	(2; 0; 1)	(12; 6; -9)	$4\vec{a}; 3\vec{b}$	$2\vec{a}; 3\vec{b}; \vec{c}$
26	(-4; 2; -3)	(0; -3; 5)	(6; 6; -4)	$-7\vec{a}; 4\vec{c}$	$5\vec{a}; -\vec{b}; 3\vec{c}$
27	(7; -4; -5)	(1; -11; 3)	(5; 5; 3)	$2\vec{b}; 6\vec{c}$	$3\vec{a}; -7\vec{b}; 2\vec{c}$
28	(-9; 0; 4)	(2; -4; 6)	(3; -6; 9)	$-2\vec{a}; 8\vec{c}$	$3\vec{a}; -5\vec{b}; 4\vec{c}$
29	(3; -2; 1)	(0; 2; -3)	(-3; 2; -1)	$-2\vec{a}; 4\vec{b}$	$\vec{a}; -3\vec{b}; 2\vec{c}$
30	(-5; 2; -2)	(7; 0; -5)	(2; 3; -2)	$8\vec{a}; -6\vec{c}$	$2\vec{a}; 4\vec{b}; -5\vec{c}$

4. Дано три сили $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$, прикладені до точки A . Обчислити: а) роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка A , рухаючись прямолінійно, перемістилась у точку B ; б) величину моменту рівнодійної цих сил відносно точки B .

№	\vec{P}	\vec{Q}	\vec{R}	A	B
1	(9, -3, 4)	(5, 6, -2)	(-4, -2, 7)	(-5, 4, -2)	(4, 6, -5)
2	(5, -2, 3)	(4, 5, -3)	(-1, -3, 6)	(7, 1, -5)	(2, -3, -6)
3	(3, -5, 4)	(5, 6, -3)	(-7, -1, 8)	(-3, 5, 9)	(5, 6, -3)
4	(-10, 6, 5)	(4, -9, 7)	(5, 3, -3)	(4, -5, 9)	(4, 7, -5)
5	(5, -3, 1)	(4, 2, -6)	(-5, -3, 7)	(-5, 3, 7)	(3, 8, -5)
6	(-5, 8, 4)	(6, -7, 3)	(3, 1, -5)	(2, -4, 7)	(0, 7, 4)
7	(7, -5, 2)	(3, 4, -8)	(-2, -4, 3)	(-3, 2, 0)	(6, 4, -3)
8	(3, -4, 2)	(2, 3, -5)	(-3, -2, 4)	(5, 3, -7)	(4, -1, -4)
9	(4, -2, -5)	(5, 1, -3)	(-6, 2, 5)	(-3, 2, -6)	(4, 5, -3)
10	(7, 3, -4)	(9, -4, 2)	(-6, 1, 4)	(-7, 2, 5)	(4, -2, 11)
11	(9, -4, 4)	(-4, 6, -3)	(3, 4, 2)	(5, -4, 3)	(4, -5, 9)
12	(6, -4, 5)	(-4, 7, 8)	(5, 1, -3)	(-5, -4, 2)	(7, -3, 6)
13	(5, 5, -6)	(7, -6, 6)	(-4, 3, 4)	(-9, 4, 7)	(8, -1, 7)
14	(7, -6, 2)	(-6, 2, -1)	(1, 6, 4)	(3, -6, 1)	(6, -2, 7)
15	(4, -2, 3)	(-2, 5, 6)	(7, 3, -1)	(-3, -2, 5)	(9, -5, 4)
16	(7, 3, -4)	(3, -2, 2)	(-5, 4, 3)	(-5, 0, 4)	(4, -3, 5)
17	(3, -2, 4)	(-4, 4, -3)	(3, 4, 2)	(1, -4, 3)	(4, 0, -2)
18	(2, -1, -3)	(3, 2, -1)	(-4, 1, 3)	(-1, 4, -2)	(2, 3, -1)
19	(4, 5, 1)	(1, 3, -1)	(-3, -6, 7)	(2, -1, 0)	(3, 3, -4)
20	(1, -3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	(1, 1, -3)	(2, 4, -1)
21	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	(-1, -3, 5)	(4, 5, -2)
22	(3, -2, 1)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)
23	(-1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	(4, -5, -3)	(-3, 2, -3)
24	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)
25	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	(-3, 4, 5)	(-2, 5, 1)
26	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)
27	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)
28	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	(2, -1, 3)	(5, 1, 2)
29	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, -1)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)
30	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3, -1)	(-2, 3, -4)	(3, -6, 2)

Тема 4 «Аналітична геометрія на площині. Пряма лінія»

Приклади розв'язання типового варіанту

1. Дано трикутник ABC с вершинами в точках $A(-1; 3); B(7, 2); C(3, 8)$. Знайти:
 - 1.а) периметр та площу трикутника.
 - 1.б) рівняння сторін.
 - 1.в) кути трикутника.
 - 1.г) визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).
 - 1.д) координати центра мас трикутника.
 - 1.е) рівняння медіани AF .
 - 1.є) рівняння та довжину висоти CN .
 - 1.ж) рівняння бісектриси BT .
 - 1.з) координати центру та радіус описаного кола.
 - 1.и) координати точки перетину медіани AF та прямої, що проходить через точку C паралельно AB .

Розв'язання:

Побудуємо трикутник ABC .

1.а) За визначенням периметру, як суми довжин всіх сторін, знайдемо довжини сторін трикутника за формулою (3.1):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

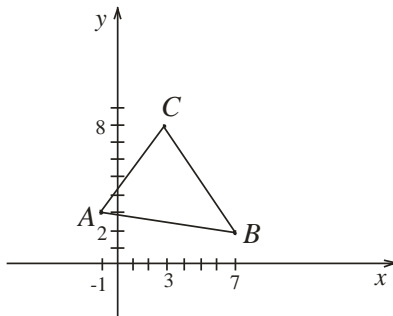
$$AB = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65} \text{ (од.)};$$

$$BC = \sqrt{(3 - 7)^2 + (8 - 2)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ (од.)};$$

$$AC = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (8 - 3)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \text{ (од.)};$$

Отже, периметр трикутника

$$P = \sqrt{65} + 2\sqrt{13} + \sqrt{41} \text{ (од.)}.$$



Для обчислення площі трикутника звернемося до формули (3.10) і скористаємося запропонованим мнемонічним правилом:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 3 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-2 + 56 + 9 - 21 - 6 + 8| = \frac{1}{2} \cdot 44 = 22 \text{ од}^2.$$

1.6) Для знаходження рівняння сторін трикутника скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки (3.18):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

і запишемо отримані рівняння у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Рівняння прямої AB :

$$\frac{x+1}{7+1} = \frac{y-3}{2-3}; \quad \frac{x+1}{8} = \frac{y-3}{-1}; \quad 8(y-3) = -1(x+1);$$

$$8y - 24 = -x - 1; \quad 8y = -x + 23;$$

Остаточно маємо рівняння AB :

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{23}{8} \quad \left(k = -\frac{1}{8}; \quad b = \frac{23}{8}\right).$$

Проаналізуємо отриманий результат. Коефіцієнт k від'ємний, дійсно, пряма утворює з додатнім напрямком осі абсцис тупий кут, $b = \frac{23}{8}$ - пряма відсікає на осі ординат відрізок майже в три одиниці.

Рівняння прямої BC :

$$\frac{x-7}{3-7} = \frac{y-2}{8-2}; \quad \frac{x-7}{-4} = \frac{y-2}{6}; \quad -4(y-2) = 6(x-7) : (-2);$$

$$2y - 4 = -3x + 21; \quad 2y = -3x + 25;$$

Остаточно маємо рівняння BC :

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2} \quad \left(k = -\frac{3}{2}; \quad b = \frac{25}{2}\right).$$

Проаналізуємо отриманий результат. Коефіцієнт k від'ємний, дійсно, пряма утворює з додатнім напрямком осі абсцис тупий кут, $b = \frac{25}{2}$ - пряма відсікає на осі ординат відрізок майже в 12,5 одиниць.

Рівняння прямої AC :

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-3}{8-3}; \quad \frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{5}; \quad 4(y-3) = 5(x+1);$$

$$4y - 12 = 5x + 5; \quad 4y = 5x + 17;$$

Остаточно маємо рівняння AC :

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{17}{4} \quad \left(k = \frac{5}{4}; \quad b = \frac{17}{4}\right).$$

Проаналізуємо отриманий результат. Коефіцієнт k додатний, дійсно, пряма утворює з додатнім напрямком осі абсцис гострий кут, $b = \frac{17}{4}$ - пряма відсікає на осі ординат відрізок майже в чотири з четвертю одиниці.

1.в) Кути трикутника знайдемо за формулою (3.23):

$$tg\vartheta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Пригадаємо кутові коефіцієнти сторін трикутника:

$$k_{AB} = -\frac{1}{8}; \quad k_{BC} = -\frac{3}{2}; \quad k_{AC} = \frac{5}{4}.$$

За формулою (3.23) маємо:

$$tg < BAC = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}} = \frac{\frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{8}\right)}{1 + \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)} = \frac{\frac{5 \cdot 8 + 1 \cdot 4}{32}}{\frac{32 - 5 \cdot 1}{32}} = \frac{44}{27};$$

$$< BAC = \arctg \frac{44}{27};$$

$$tg < ABC = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \frac{-\frac{1}{8} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{-1 \cdot 2 + 3 \cdot 8}{16}}{\frac{1 \cdot 32 + 3}{32}} = \frac{22}{35};$$

$$< ABC = \arctg \frac{22}{35};$$

$$tg < ACB = \frac{k_{CB} - k_{AC}}{1 + k_{CB} \cdot k_{AC}} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{5}{4}}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{5}{4}} = \frac{\frac{-3 \cdot 4 - 5 \cdot 2}{8}}{\frac{1 \cdot 8 - 15}{8}} = \frac{-22}{-7} = \frac{22}{7};$$

$$< ACB = \arctg \frac{22}{7}.$$

1.г) Визначимо тип трикутника. В п. 1.1 ми обчислили довжини сторін трикутника. З результатів прямує, що трикутник *різносторонній*.

З умови $c^2 < a^2 + b^2$ ($AB^2 < BC^2 + AC^2$; $65 < 52 + 41$) прямує, що трикутник *гострокутний*. Зауважимо, що в згаданій нерівності за c вважаємо найдовшу з сторін.

1.д) Координати центра мас трикутника обчислимо за формулами (3.8), (3.9):

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{-1 + 7 + 3}{3} = 3;$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{3 + 2 + 8}{3} = \frac{13}{3}.$$

Центр мас трикутника розташований у точці $O_1 \left(3; \frac{13}{3}\right)$.

1.е) Для того, щоб записати рівняння медіани AF , згадаємо, що за визначенням, медіана поділяє протилежну сторону навпіл. Медіана AF поділяє навпіл сторону BC . Знайдемо координати точки F як середини BC за формулами (3.6), (3.7):

$$x_F = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{7 + 3}{2} = 5;$$

$$y_F = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5.$$

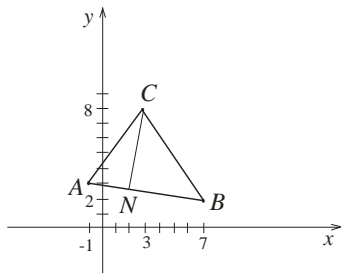
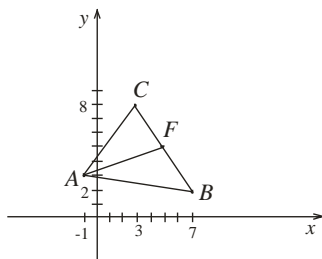
Точка F має координати: $F(5; 5)$. Рівняння прямої AF запишемо за вже згаданою нами формулою (2.18):

$$\frac{x - (-1)}{5 - (-1)} = \frac{y - 3}{5 - 3}; \quad \frac{x + 1}{6} = \frac{y - 3}{2}; \quad 6(y - 3) = 2(x + 1) | : 2;$$

$$3y - 9 = x + 1; \quad 3y = x + 10.$$

$$\text{Остаточно маємо } AF: y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}.$$

1.є) Рівняння висоти CN знаходимо за визначенням висоти. З нього прямує, що висота CN перпендикулярна стороні AB . За умовою перпендикулярності (3.22)



маємо:

$$k_{CN} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{1}{8}} = 8.$$

Про висоту CN нам відомі кутовий коефіцієнт та координати однієї точки – C . Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку (3.20):

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Підставимо у рівняння $k_{CN} = 8$ та координати точки $C(3,8)$:

$$y - 8 = 8(x - 3); \quad y = 8x - 24 + 8.$$

Остаточно маємо рівняння CN :

$$y = 8x - 16.$$

Щоб знайти довжину висоти CN , згадаємо, що найкоротша відстань між точкою та прямою лягає по перпендикуляру. Отже, довжина висоти CN дорівнює відстані від точки C до прямої AB . В формулі (3.27) рівняння прямої має вигляд загального:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Перепишемо рівняння AB у вигляді загального і підставимо у формулу:

$$AB: \quad x + 8y - 23 = 0;$$

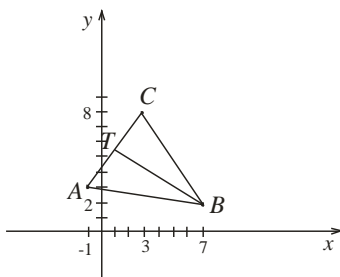
$$|CN| = d = \frac{|1 \cdot 3 + 8 \cdot 8 - 23|}{\sqrt{1^2 + 8^2}} = \frac{44}{\sqrt{65}} \text{ (од.)}.$$

1.ж) Знайдемо рівняння бісектриси BT . За визначенням бісектриси, вона поділяє кут навпіл. Для розв'язання задачі скористаємося властивістю бісектрис, а саме: бісектриса поділяє протилежну сторону у відношенні, яке дорівнює відношенню прилеглих сторін.

Стосовно бісектриси BT , ця властивість має вигляд:

$$\frac{AT}{TC} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{13}} = \lambda.$$

За формулами (3.4), (3.5) знайдемо координати точки T :



$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-1 + \frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{13}} \cdot 3}{1 + \frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{13}}} = \frac{-2\sqrt{13} + 3\sqrt{65}}{2\sqrt{13} + \sqrt{65}};$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{3 + \frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{13}} \cdot 8}{1 + \frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{13}}} = \frac{6\sqrt{13} + 4\sqrt{65}}{2\sqrt{13} + \sqrt{65}};$$

Координати точки $T\left(\frac{-2\sqrt{13} + 3\sqrt{65}}{2\sqrt{13} + \sqrt{65}}; \frac{6\sqrt{13} + 4\sqrt{65}}{2\sqrt{13} + \sqrt{65}}\right)$. Рівняння бісектриси BT за формулою (3.18) набуває вигляду:

$$\frac{\frac{x-7}{-2\sqrt{13}+3\sqrt{65}}-7}{\frac{x-7}{2\sqrt{13}+\sqrt{65}}-7} = \frac{\frac{y-2}{\frac{6\sqrt{13}+4\sqrt{65}}{2\sqrt{13}+\sqrt{65}}-2}}{\frac{y-2}{\frac{6\sqrt{13}+4\sqrt{65}}{2\sqrt{13}+\sqrt{65}}-2}} \quad \left| : (2\sqrt{13} + \sqrt{65}); \right.$$

$$\frac{x-7}{-2\sqrt{13}+3\sqrt{65}-14\sqrt{13}-7\sqrt{65}} = \frac{y-2}{6\sqrt{13}+4\sqrt{65}-4\sqrt{13}+2\sqrt{65}};$$

$$\frac{x-7}{-16\sqrt{13}-4\sqrt{65}} = \frac{y-2}{2\sqrt{13}+6\sqrt{65}} \quad \left| \cdot 2; \right.$$

$$\frac{x-7}{-8\sqrt{13}-2\sqrt{65}} = \frac{y-2}{\sqrt{13}+3\sqrt{65}};$$

$$(y-2) \cdot (-8\sqrt{13}-2\sqrt{65}) = (x-7) \cdot (\sqrt{13}+3\sqrt{65});$$

$$(-8\sqrt{13}-2\sqrt{65})y + 16\sqrt{13} + 4\sqrt{65} = (\sqrt{13}+3\sqrt{65})x - 7\sqrt{13} - 21\sqrt{65};$$

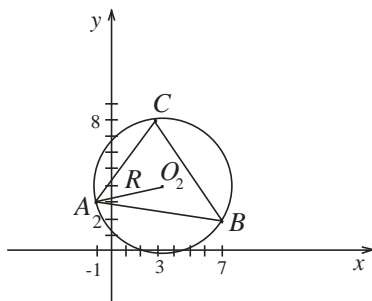
$$(-8\sqrt{13}-2\sqrt{65})y = (\sqrt{13}+3\sqrt{65})x - 23\sqrt{13} - 25\sqrt{65};$$

і, нарешті, BT :

$$y = -\frac{\sqrt{13}+3\sqrt{65}}{8\sqrt{13}+2\sqrt{65}}x + \frac{23\sqrt{13}+25\sqrt{65}}{8\sqrt{13}+2\sqrt{65}}.$$

1.3) Координати центру та радіус описаного кола можна знайти двома різними способами. Опишемо кожний з них, а розв'яжемо задачу лише одним, запропонувавши інший розв'язок другим способом читачеві.

По-перше, за визначенням, відомим нам з курсу середньої школи, центр описаного кола лежить в точці перетину серединних перпендикулярів. Отже, щоб знайти координати центру, необхідно скласти рівняння двох серединних перпендикулярів (знайти координати середин протилежних сторін та, з умови перпендикулярності, кутові коефіцієнти, рівняння – за



формулою (3.20)) та точку їх перетину (як результат розв'язку системи).

По-друге, за визначенням кола, центр – точка, рівновіддалена від всіх точок, що належать колу, тобто від всіх вершин трикутника. На наш погляд, розв'язання задачі цим методом потребує від нас менших зусиль та використання меншої кількості формул. Тому розважимо задачу саме так.

Нехай точка $O_2(x, y)$ – центр описаного кола. За приведеним визначенням $AO_2 = BO_2 = CO_2$. Отже, за формулою (3.1) маємо

$$AO_2 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2};$$

$$BO_2 = \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2};$$

$$CO_2 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-8)^2}.$$

Перепишемо тотожність $AO_2 = BO_2 = CO_2$ у вигляді двох рівнянь $AO_2 = BO_2$ і $AO_2 = CO_2$ – отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими, які відразу підведемо до квадрату:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-7)^2 + (y-2)^2 \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-8)^2 \end{cases};$$

За формулами квадрат суми та квадрат різниці спростимо отримані рівняння:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 4y + 4 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 16y + 64 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 16x - 2y = 43 \\ 8x + 10y = 63 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & -2 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 160 + 16 = 176;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 43 & -2 \\ 63 & 10 \end{vmatrix} = 430 + 126 = 556;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 16 & 43 \\ 8 & 63 \end{vmatrix} = 1008 - 344 = 664;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{556}{176} = \frac{139}{44};$$

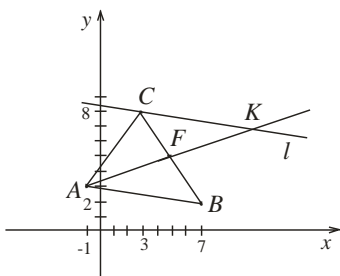
$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{664}{176} = \frac{83}{22};$$

Отже, розв'язок системи: $x = \frac{139}{44}$; $y = \frac{83}{22}$. Звідси координати центру описаного кола $O_2\left(\frac{139}{44}; \frac{83}{22}\right)$. А радіус знайдемо, наприклад, як $R = AO_2$

$$R = \sqrt{\left(\frac{139}{44} + 1\right)^2 + \left(\frac{83}{22} - 3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{183}{44}\right)^2 + \left(\frac{17}{22}\right)^2} = \frac{\sqrt{34645}}{44} \text{ (од.)}$$

Відповідь: Координати центру описаного кола $O_2\left(\frac{139}{44}; \frac{83}{22}\right)$, радіус $R = \frac{\sqrt{34645}}{44}$ (од.).

1.и) Координати точки перетину медіани AF та прямої, що проходить через точку C паралельно AB знаходяться як результат розв'язку системи, яка складається з рівнянь, що описують вказані лінії. Нагадаємо, що рівняння медіани AF ми вже знайшли у п. 1.б: $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.



Рівняння прямої l , що проходить через точку C паралельно AB знайдемо з умови паралельності прямих AB і l : $k_l = k_{AB} = -\frac{1}{8}$ (3.21). Нам відомий кутовий коефіцієнт $k_l = -\frac{1}{8}$ і координати точки $C(3, 8)$, тому за формулою (3.20) маємо:

$$y - 8 = -\frac{1}{8}(x - 3);$$

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{67}{8}.$$

Отже система набуває вигляду:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \\ y = -\frac{1}{8}x + \frac{67}{8} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - 3y = -10 \\ x + 8y = 67 \end{cases}.$$

За правилами Крамера маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -10 & -3 \\ 67 & 8 \end{vmatrix} = -80 + 201 = 121;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 1 & 67 \end{vmatrix} = 67 + 10 = 77;$$

$$x = \frac{121}{11} = 11; \quad y = \frac{77}{11} = 7.$$

Відповідь: Точка перетину має координати $K(11,7)$.

2. Довести, що рівняння $\frac{6x-2}{3} + \frac{y-2}{5} = 2$ є рівнянням прямої.

Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

2.а) загальне рівняння прямої.

2.б) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

2.в) рівняння прямої у відрізках.

2.г) нормальне рівняння прямої.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння:

$$\frac{6x-2}{3} + \frac{y-2}{5} = 2 \quad | \cdot 15;$$

$$30x - 10 + 3y - 6 - 30 = 0;$$

$$30x + 3y - 40 = 0.$$

Ми отримали рівняння першого ступеня, а згідно з т. 3.2 такому рівнянню відповідає пряма.

Отже, загальне рівняння прямої (3.15) ($A = 30, B = 3, C = -40$).

$$30x + 3y - 40 = 0.$$

Відповідні коефіцієнти ($A = 30, B = 3, C = -40$).

Перепишемо отримане рівняння у вигляді (2.15):

$$3y = -30x + 40;$$

$$y = -10x + \frac{40}{3}.$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд:

$$y = -10x + \frac{40}{3},$$

Кутовий коефіцієнт прямої $k = -10$, а відрізок, який відсікає пряма на осі ординат $b = \frac{40}{3}$.

Для отримання рівняння прямої у відрізках (3.16) перетворимо загальне рівняння:

$$30x + 3y - 40 = 0;$$

$$30x + 3y = 40 | : 40;$$

$$\frac{30x}{40} + \frac{3y}{40} = 1;$$

$$\frac{x}{\frac{40}{3}} + \frac{y}{\frac{40}{3}} = 1.$$

Рівняння прямої у відрізках має вигляд:

$$\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{\frac{40}{3}} = 1.$$

Пряма відсікає на осі абсцис відрізок у $a = \frac{4}{3}$ одиниць, а на осі ординат – у $b = \frac{40}{3}$ одиниць.

Для того, щоб записати нормальне рівняння прямої (3.24), обчислимо нормуючий множник (3.25), і оберемо його знак, оберненим до знаку C в загальному рівнянні прямої, тобто знак «+».

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{30^2 + 3^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{99}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{11}};$$

$$M = \frac{1}{3\sqrt{11}}.$$

Помножимо загальне рівняння на нормуючий множник:

$$30x + 3y - 40 = 0 \mid \cdot \frac{1}{3\sqrt{11}}.$$

Остаточно маємо *нормальне рівняння прямої*:

$$\frac{10}{\sqrt{11}}x + \frac{1}{\sqrt{11}}y - \frac{40}{3\sqrt{11}} = 0.$$

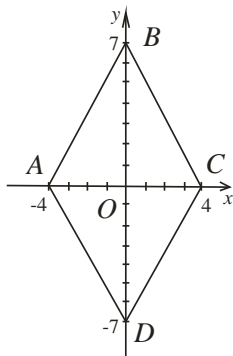
3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 8 та 14 одиницям довжини.

Розв'язання: За властивостями ромбу, його діагоналі перпендикулярні і точкою перетину поділяються навпіл. Звідси прямує, що осі координат можуть утворювати діагоналі ромбу, й відсікають на осі абсцис по 4 одиниці, а на осі ординат – по 7. Підставимо отримані результати в рівняння прямої у відрізках (3.16):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

$$AB: \frac{x}{-4} + \frac{y}{7} = 1;$$

$$BC: \frac{x}{4} + \frac{y}{7} = 1;$$



$$CD: \frac{x}{4} + \frac{y}{-7} = 1;$$

$$DA: \frac{x}{-4} + \frac{y}{-7} = 1.$$

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $3x - 2y + 5 = 0$ та $4x + y - 1 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

Розв'язання: Знайдемо точку перетину прямих Q як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь за правилами Крамера:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -5; \\ 4x + y = 1; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 2 = -3;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 20 = 26;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{3}{11}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{26}{11};$$

$$Q\left(-\frac{3}{11}; \frac{26}{11}\right).$$

Рівняння шуканої прямої OQ знайдемо за формулою (3.18):

$$\frac{x-0}{-\frac{3}{11}-0} = \frac{y-0}{\frac{26}{11}-0};$$

$$-\frac{3}{11}y = \frac{26}{11}x;$$

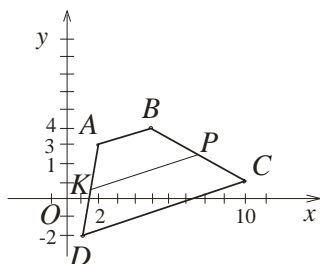
$$y = -\frac{26}{3}x.$$

$$\text{Відповідь: } OQ: y = -\frac{26}{3}x.$$

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2,3)$, $B(5,4)$, $C(10,1)$, $D(1,-2)$ є трапецією. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$.

Розв'язання. За визначенням, трапеція – це чотирикутник, у якого дві протилежні сторони паралельні.

Обчислимо кутові коефіцієнти сторін чотирикутника (за



формулою (3.17)) й перевіримо, чи є така пара коефіцієнтів, яка б задовольняла умові паралельності (3.21).

$$k_{AB} = \frac{4-3}{5-2} = \frac{1}{3}; \quad k_{BC} = \frac{1-4}{10-5} = -\frac{3}{5};$$

$$k_{CD} = \frac{-2-1}{1-10} = \frac{1}{3}; \quad k_{AD} = \frac{-2-3}{1-2} = 5.$$

Бачимо, що $k_{AB} = k_{CD}$, звідси прямує, що $AB \parallel CD$. Отже, $ABCD$ - трапеція.

Шукана середня лінія KP проходить через середини бічних сторін паралельно AB і CD .

Знайдемо точку K - середину AD (3.6), (3.7):

$$x_K = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}; \quad y_K = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}; \quad K\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

З умови паралельності (3.21) $k_{KP} = k_{AB} = \frac{1}{3}$. Підставимо у формулу (3.10):

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right);$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2};$$

$$y = \frac{1}{3}x.$$

$$\text{Відповідь: } KP: \quad y = \frac{1}{3}x.$$

6. Знайти відстань між прямими $3x - 5y + 7 = 0$ та $3x - 5y - 8 = 0$.

Розв'язання. Задані прямі паралельні, тому що $k_1 = k_2 = \frac{3}{5}$. Приведемо рівняння прямих до нормального вигляду:

$$M_1 = M_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{34}};$$

$$(1): \quad -\frac{3}{\sqrt{34}}x + \frac{5}{\sqrt{34}}y - \frac{7}{\sqrt{34}} = 0;$$

$$(2): \quad \frac{3}{\sqrt{34}}x - \frac{5}{\sqrt{34}}y - \frac{8}{\sqrt{34}} = 0.$$

$$\text{Звідси } p_1 = \frac{7}{\sqrt{34}}, \quad p_2 = \frac{8}{\sqrt{34}}.$$

Прямі розташовані по обидві сторони від початку координат. Відстань між прямими – це сума відстаней від початку координат кожної з прямих:

$$d = p_1 + p_2 = \frac{7}{\sqrt{34}} + \frac{8}{\sqrt{34}} = \frac{15}{\sqrt{34}}.$$

Відповідь: $d = \frac{15}{\sqrt{34}}$.

7. Записати рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо відомі рівняння гіпотенузи (AB) $2x + 3y - 5 = 0$ і координати вершини прямого кута $C(2, -1)$.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт гіпотенузи з умови $k_{AB} = -\frac{2}{3}$. Трикутник ABC - рівнобедрений прямокутний, тому кути при основі дорівнюють

$$\angle ABC = \angle BAC = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Скористаємося формулою (3.23) і знайдемо кутові коефіцієнти сторін AC і BC :

$$tg45^\circ = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}} = \frac{k_{AC} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k_{AC}} = 1;$$

$$k_{AC} + \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3}k_{AC};$$

$$\frac{5}{3}k_{AC} = \frac{1}{3}; \quad \rightarrow \quad k_{AC} = \frac{1}{5};$$

аналогічно,

$$tg45^\circ = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AB}} = \frac{-\frac{2}{3} - k_{BC}}{1 - \frac{2}{3}k_{BC}} = 1;$$

$$-\frac{2}{3} - k_{BC} = 1 - \frac{2}{3}k_{BC};$$

$$-\frac{1}{3}k_{BC} = \frac{5}{3}; \quad \rightarrow \quad k_{BC} = -5.$$

За формулою (3.20) шукані рівняння мають вигляд:

$$AC: \quad y + 1 = \frac{1}{5}(x - 2); \quad y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5};$$

$$BC: \quad y + 1 = -5(x - 2); \quad y = -5x + 9.$$

$$\text{Відповідь: } AC: \quad y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5}; \quad BC: \quad y = -5x + 9.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 4

1. Дано трикутник ABC с вершинами в точках A, B, C (див. табл.) Знайти:
 - 1.а) периметр та площу трикутника.
 - 1.б) рівняння сторін.
 - 1.в) кути трикутника.
 - 1.г) визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).
 - 1.д) координати центра мас трикутника.
 - 1.е) рівняння медіани AF .
 - 1.є) рівняння та довжину висоти BN .
 - 1.ж) рівняння бісектриси CT .
 - 1.з) координати центру та радіус описаного кола.
 - 1.и) координати точки перетину медіани AF та прямої, що проходить через точку C паралельно AB .
2. Довести, що рівняння (див. табл.) є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:
 - 2.а) загальне рівняння прямої.
 - 2.б) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
 - 2.в) рівняння прямої у відрізках.
 - 2.г) нормальне рівняння прямої.

№ в-та	A	B	C	рівняння
1	$(-1; -2)$	$(-2, 5)$	$(8, 1)$	$\frac{2x-5}{4} + \frac{y+3}{5} = -1$
2	$(2, 4)$	$(-3, 6)$	$(5, 7)$	$\frac{3x-1}{2} - \frac{2y+3}{4} = 2$
3	$(1, 5)$	$(5, 3)$	$(-1, -5)$	$\frac{4x-1}{3} + y - \frac{2}{5} = 4$
4	$(5, 5)$	$(1, -6)$	$(-3, 6)$	$\frac{x-1}{2} + \frac{2}{5}y = -3$
5	$(-7, 1)$	$(1, -2)$	$(6, 3)$	$\frac{7x-1}{4} + \frac{2y+3}{5} = -\frac{1}{2}$
6	$(3, 6)$	$(6, 4)$	$(3, -5)$	$6x + \frac{y-3}{7} = \frac{3}{5}$
7	$(-4, 4)$	$(4, 1)$	$(6, 5)$	$\frac{5x+1}{3} + \frac{y+1}{4} = \frac{7}{6}$
8	$(-6, 1)$	$(-4, 6)$	$(8, 1)$	$\frac{7x+8}{2} - \frac{y-1}{6} = -5$

9	$(-3,3)$	$(-2,8)$	$(7,4)$	$\frac{5x+3}{4} - 5y = 2$
10	$(-7,6)$	$(-5,2)$	$(4,7)$	$8x + \frac{6y-1}{9} + \frac{1}{5} = 0$
11	$(2,1)$	$(6,5)$	$(-4,6)$	$\frac{2x-6}{5} + \frac{y-9}{4} - 3 = 0$
12	$(-3,4)$	$(7,-3)$	$(4,-4)$	$4x + \frac{2y-9}{7} - 2 = 0$
13	$(8,1)$	$(9,7)$	$(1,8)$	$\frac{5x+2}{9} - 2y = \frac{4}{5}$
14	$(1,8)$	$(7,9)$	$(-2,-1)$	$\frac{x+7}{3} - \frac{2y-4}{5} = -3$
15	$(-4,3)$	$(7,4)$	$(9,1)$	$\frac{5x-1}{3} + \frac{y-3}{9} = 5$
16	$(-3,-3)$	$(-2,3)$	$(8,1)$	$\frac{x-1}{8} + \frac{2y+1}{5} - 2 = 0$
17	$(0,-2)$	$(-5,4)$	$(11,2)$	$\frac{3x-9}{5} + \frac{y+8}{3} - 4 = 0$
18	$(-6,1)$	$(5,3)$	$(-5,4)$	$\frac{4x+1}{3} + \frac{2y-9}{4} = -\frac{4}{5}$
19	$(-5,3)$	$(6,0)$	$(-7,-4)$	$5x - \frac{3y-8}{2} = -4$
20	$(-4,7)$	$(-5,2)$	$(2,-2)$	$\frac{x-2}{6} + \frac{2y-9}{5} = 1$
21	$(9,4)$	$(-6,6)$	$(-1,8)$	$\frac{5x-2}{3} - \frac{3y+1}{2} - 8 = 0$
22	$(4,-3)$	$(3,2)$	$(-7,1)$	$\frac{x-1}{11} - 4y = -\frac{7}{3}$
23	$(-2,-4)$	$(-6,4)$	$(3,5)$	$\frac{5x-1}{8} - \frac{y+4}{2} = 6$
24	$(5,4)$	$(-3,-4)$	$(-6,-2)$	$\frac{3x-7}{4} + \frac{2y+5}{7} = -3$
25	$(6,9)$	$(3,3)$	$(8,-1)$	$\frac{3x-7}{4} + 4y = \frac{3}{5}$
26	$(5,10)$	$(2,3)$	$(8,-3)$	$\frac{x+8}{5} + \frac{6y-11}{4} = -1$
27	$(6,3)$	$(-7,4)$	$(-6,1)$	$\frac{x-3}{8} + \frac{2y+5}{4} = 3$
28	$(1,4)$	$(-2,7)$	$(-9,2)$	$\frac{6x-1}{5} + \frac{y+9}{3} = -2$
29	$(2,-3)$	$(5,1)$	$(3,8)$	$\frac{5x+4}{2} - \frac{y-2}{6} = 5$
30	$(-1,7)$	$(-5,7)$	$(1,-4)$	$\frac{x-3}{7} + \frac{5y-2}{3} = -1$

3.1. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 4 та 6 одиницям довжини.

4.1. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $y = \frac{1}{2}x + 2$ та $y = 3x - 7$ з початком координат.

5.1. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,4), B(3,5), C(11,1), D(-1,-2)$ є трапеція. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайти площу трапеції $ABCD$.

6.1. Знайти відстань між паралельними прямими $y = 5x - 4$ та $y = 5x + 13$.

7.1. Дано дві вершини трикутника $A(2,2), B(3,0)$ та точка перетину його медіан $D(3,1)$. Знайти третю вершину трикутника.

3.2. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 10 та 3 одиницям довжини.

4.2. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $y = 3x - 4$ та $y = \frac{5}{2}x + 1$ з початком координат.

5.2. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,2), B(-2,6), C(5,5), D(6,1)$ є паралелограм. Знайти рівняння діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

6.2. Знайти відстань між $2x - 5y - 3 = 0$ та $2x - 5y + 6 = 0$.

7.2. Знайти вершини прямокутного рівнобічного трикутника, якщо відомі вершина прямого кута $C(3,-1)$ та рівняння гіпотенузи $3x - y + 2 = 0$.

3.3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 8 одиницям довжини.

4.3. Записати рівняння прямої, що з'єднає точку перетину прямих $2x - y + 5 = 0$ та $x + 3y - 2 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.3. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3,6)$, $B(-1,1)$, $C(4,-1)$, $D(2,4)$ є ромб. Знайти точку перетину діагоналей ромба $ABCD$. Знайти площу ромба $ABCD$.

6.3. Знайти відстань між паралельними прямими
 $4x + 3y - 7 = 0$ та $4x + 3y - 6 = 0$.

7.3. Відомі координати двох вершин рівностороннього трикутника ABC : $A(2,1)$ та $B(2,5)$. Знайти координати третьої вершини C .

3.4. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 15 та 4 одиницям довжини.

4.4. Записати рівняння прямої, що з'єднає точку перетину прямих $4x + 3y - 2 = 0$ та $x + 2y + 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.4. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-4,3)$, $B(1,5)$, $C(3,0)$, $D(-2,-2)$ є прямокутник. Знайти кути перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. Знайти площу та периметр прямокутника $ABCD$.

6.4. Знайти відстань між паралельними прямими $3x - 7y - 2 = 0$ та $3x - 7y + 5 = 0$.

7.4. Відомі координати двох вершин трикутника ABC : $A(-4,3)$ та $B(4,-1)$ та точка перетину висот $M(3,3)$. Знайти координати третьої вершини C .

3.5. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 8 та 11 одиницям довжини.

4.5. Записати рівняння прямої, що з'єднає точку перетину прямих $x + 4y - 5 = 0$ та $3x - 5y + 7 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(1,5), B(0,1), C(-4,2), D(-3,6)$ є квадрат. Знайти площу вписаного в квадрат $ABCD$ кола. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$.

6.5. Знайти відстань між прямими $7x - 2y + 5 = 0$ та $7x - 2y - 1 = 0$.

7.5. Дві сторони паралелограма задані рівняннями $y = x - 2$ та $x - 5y + 6 = 0$. Його діагоналі перетинаються в початку координат. Написати рівняння двох інших сторін.

3.6. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 7 одиницям довжини.

4.6. Записати рівняння прямої, що з'єднає точку перетину прямих $4x - 7y + 8 = 0$, $3x - 2y + 11 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.6. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(0,7), B(3,6), C(4,1), D(-2,3)$ є трапеція. Знайти рівняння діагоналей трапеції $ABCD$. Знайти площу трапеції $ABCD$.

6.6. Знайти відстань між паралельними прямими $11x - 2y + 3 = 0$ та $11x - 2y - 5 = 0$.

7.6. Дано трикутник з вершинами $A(0, -4), B(3,0), C(0,6)$. Знайти відстань від вершини C до бісектриси кута A .

3.7. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 4 та 10 одиницям довжини.

4.7. Записати рівняння прямої, що з'єднає точку перетину прямих $x - y - 8 = 0$ та $4x + 3y + 7 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.7. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2,1), B(5,-3), C(6,2), D(3,6)$ є паралелограм. Знайти точку перетину діагоналей паралелограма. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

6.7. Знайти відстань між прямими $5x + 9y - 2 = 0$ та $5x + 9y + 6 = 0$.

7.7. Обчислити координати вершин ромба, якщо відомі рівняння двох його сторін $x + 2y = 4$ та $x + 2y = 10$, та рівняння однієї з його діагоналей $y = x + 2$.

3.8. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 12 та 7 одиницям довжини.

4.8. Записати рівняння прямої, що з'єднає точку перетину прямих $2x - y - 4 = 0$ та $11x = 4y - 7$ з точкою $O(0,0)$.

5.8. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(3,6), B(8,6), C(11,2), D(6,2)$ є ромб. Знайти рівняння діагоналей ромба $ABCD$. Знайти площу ромба $ABCD$.

6.8. Знайти відстань між паралельними прямими

$$7x - y + 5 = 0 \text{ та } 7x - y - 1 = 0.$$

7.8. Записати рівняння сторін трикутника, якщо відома одна з його вершин $A(0,2)$, та рівняння висот $(BM)x + y = 4$ та $(CM)y = 2x$, де M – точка перетину висот

3.9. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 4 та 9 одиницям довжини.

4.9. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $y = 8x + 4$ та $3x + 5y + 6 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.9. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3, -2), B(1, -5), C(3, 1), D(-1, 4)$ є паралелограм. Знайти точку перетину діагоналей паралелограма. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

6.9. Знайти відстань між прямими $4x - y - 7 = 0$ та $4x - y - 1 = 0$.

7.9. Дано координати центру квадрата $C(-1, 0)$ та рівняння сторони $x + 3y - 5 = 0$. Записати рівняння трьох інших сторін квадрата.

3.10. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 1 та 11 одиницям довжини.

4.10. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x - 8y = 9$ та $y = \frac{1}{3}x + 2$ з початком координат.

5.10. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1, -2), B(-3, 3), C(2, 5), D(4, 0)$ є квадрат. Знайти рівняння та довжину діагоналей квадрата. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$.

6.10. Знайти відстань між паралельними прямими $3x + 5y + 1 = 0$ та $3x + 5y - 7 = 0$.

7.10. В прямокутному рівнобічному трикутнику відомі рівняння катету $y = 2x$ та середина гіпотенузи $K(4, 2)$. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника.

3.11. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 10 та 3 одиницям довжини.

4.11. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x - 5y - 9 = 0$ та $2x - 8y - 5 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.11. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(6,0)$, $B(7,4)$, $C(-1,6)$, $D(-2,2)$ є прямокутник. Знайти точку перетину діагоналей прямокутника. Знайти площу та периметр прямокутника $ABCD$.

6.11. Знайти відстань між прямими $x + y + 9 = 0$ та $x + y - 17 = 0$.

7.11. Відомі рівняння двох сторін AB та BC паралелограма $2x - y + 5 = 0$ та $x - 2y + 4 = 0$, його діагоналі перетинаються в точці $M(1,4)$. Знайти довжини його висот.

3.12. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 9 одиницям довжини.

4.12. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $9x + y + 1 = 0$ та $4x - 6y - 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.12. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3,6)$, $B(2,1)$, $C(3,-6)$, $D(-2,-1)$ є ромб. Знайти точку перетину діагоналей ромба $ABCD$. Знайти площу та периметр ромба $ABCD$.

6.12. Знайти відстань між прямими $3x - 5y - 9 = 0$ та $3x - 5y - 6 = 0$.

7.12. Точка $H(-3,2)$ є точкою перетину висот трикутника, дві сторони якого належать прямим $y = 2x$ і $y = -x + 3$. Записати рівняння третьої сторони трикутника.

3.13. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 3 та 10 одиницям довжини.

4.13. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $2x - y - 9 = 0$ та $5x - 6y - 2 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.13. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-2,7), B(2,8), C(9,5), D(-3,2)$ є трапеція. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайти площу трапеції $ABCD$.

6.13. Знайти відстань між прямими $7x + y + 8 = 0$ та $7x + y - 9 = 0$.

7.13. Дано координати двох вершин трикутника $A(-1,3), B(2,5)$ і точки перетину його висот $H(1,4)$. Знайти координати третьої вершини трикутника і записати рівняння його сторін.

3.14. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 13 та 2 одиницям довжини.

4.14. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x - 4y - 9 = 0$ та $x + 7y + 2 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.14. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3,-1), B(-1,6), C(3,5), D(1,-2)$ є прямокутник. Знайти рівняння діагоналей прямокутника $ABCD$. Знайти площу та периметр прямокутника $ABCD$.

6.14. Знайти відстань між прямими $3x + y + 2 = 0$ та $3x + y + 6 = 0$.

7.14. Відомі точки $K(1,3)$ і $L(-1,1)$ - середини основ рівнобічної трапеції. Точки $P(3,0)$ і $Q(-3,5)$ належать її бічним сторонам. Записати рівняння сторін трапеції.

3.15. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 11 одиницям довжини.

4.15. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x + 4y - 2 = 0$ та $x - y + 5 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.15. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(4,1), B(0,4), C(3,8), D(7,5)$ є квадрат. Знайти рівняння діагоналей квадрата $ABCD$. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$.

6.15. Знайти відстань між прямими $8x - 3y - 1 = 0$ та $8x - 3y + 4 = 0$.

7.15. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(5, -1)$ перпендикулярно відріzkу AB , якщо $A(4,5); B(3,2)$.

3.16. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 7 та 4 одиницям довжини.

4.16. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $9x - 2y - 7 = 0$ та $x - 2y + 5 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.16. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2,3), B(7, -2), C(8,5), D(3,10)$ є ромб. Знайти точку перетину діагоналей ромба $ABCD$. Знайти площу та периметр ромба $ABCD$.

6.16. Знайти відстань між паралельними прямими
 $2x + 3y - 11 = 0$ та $2x + 3y + 2 = 0$.

7.16. Точка $A(2,0)$ є вершиною правильного трикутника, а сторона, що лежить проти неї, задана рівнянням $x + y - 1 = 0$. Записати рівняння двох інших сторін трикутника.

3.17. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 2 та 9 одиницям довжини.

4.17. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $2x - 5y - 9 = 0$ та $x + 4y + 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.17. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3,3), B(5,4), C(4,-1), D(-4,-2)$ є паралелограм. Знайти рівняння діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

6.17. Знайти відстань між прямими $7x + y - 4 = 0$ та $7x + y + 12 = 0$.

7.17. Дано вершини трикутника $A(3,-2), B(5,2), C(-1,4)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через середину сторони BC перпендикулярно стороні AB .

3.18. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 2 та 9 одиницям довжини.

4.18. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x - 2y - 1 = 0$ та $2x + y - 7 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.18. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-6,6), B(-4,1), C(2,2), D(6,8)$ є трапеція. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайти площу та периметр трапеції $ABCD$.

6.18. Знайти відстань між прямими $x + 9y - 3 = 0$ та $x + 9y - 6 = 0$.

7.18. Дано точка $A(3,-2)$ - вершина квадрата і точка $M(1,1)$ - точка перетину його діагоналей. Записати рівняння сторін квадрата.

3.19. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 13 та 2 одиницям довжини.

4.19. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $4x + 7y - 2 = 0$ та $5x - y + 1 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.19. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(4,8), B(7,3), C(-3,-3), D(-6,2)$ є прямокутник. Знайти рівняння діагоналей прямокутника $ABCD$. Знайти площу прямокутника $ABCD$.

6.19. Знайти відстань між прямими $4x - y - 8 = 0$ та $4x - y - 12 = 0$.

7.19. Відомі дві вершини трикутника $A(-6,2), B(2,-2)$ і точка перетину його висот $H(1,2)$. Знайти координати точки M перетину сторони AC і висоти BH .

3.20. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 9 та 8 одиницям довжини.

4.20. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $3x - y - 2 = 0$ та $9x + 2y + 5 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.20. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(4,2), B(3,-4), C(-3,-3), D(-2,3)$ є квадрат. Знайти точку перетину діагоналей квадрата $ABCD$. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$.

6.20. Знайти відстань між прямими $9x - y - 1 = 0$ та $9x - y + 5 = 0$.

7.20. Довжина сторони ромба з гострим кутом 60° дорівнює 2. Діагоналі ромба перетинаються в т. $M(1,2)$. Більша діагональ ромба паралельна осі Ox . Записати рівняння сторін ромба.

3.21. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 12 одиницям довжини.

4.21. Записати рівняння прямої, що з'єднає точку перетину прямих $7x - 5y - 2 = 0$ та $3x + y - 9 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.21. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-4,7)$, $B(3,3)$, $C(4,-5)$, $D(-3,-1)$ є ромб. Знайти рівняння та довжину діагоналей ромба. Знайти площу та периметр ромба $ABCD$.

6.21. Знайти відстань між прямими $x + 5y - 2 = 0$ та $x + 5y + 15 = 0$.

7.21. Точка A належить прямій $x + y = 8$. Відомо, що відстань між точками A і $B(2,8)$ дорівнює відстані від точки A до прямої $x - 3y + 2 = 0$. Знайти координати точки A .

3.22. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 11 та 1 одиницям довжини.

4.22. Записати рівняння прямої, що з'єднає точку перетину прямих $4x + 2y + 3 = 0$ та $5x + y - 4 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.22. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(1,3)$, $B(-2,-1)$, $C(-6,2)$, $D(-3,6)$ є квадрат. Знайти рівняння діагоналей квадрата $ABCD$. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$.

6.22. Знайти відстань між прямими $6x - 5y - 11 = 0$ та $6x - 5y + 2 = 0$.

7.22. Точка A належить прямій $2x - 3y + 4 = 0$. Відомо, що від точки A до прямої $4x - 3y = 0$ дорівнює 2. Знайти координати точки A .

3.23. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 4 та 12 одиницям довжини.

4.23. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x - 2y + 5 = 0$ та $2x - 7y - 2 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.23. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(5,8), B(5,4), C(-3,6), D(1,9)$ є трапеція. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайти площу трапеції $ABCD$.

6.23. Знайти відстань між прямими $x - 2y + 7 = 0$ та $x - 2y + 13 = 0$.

7.23. Знайти координати центра та радіус кола, що проходить крізь точку $A(-1,3)$ та дотикається прямих $7x + y = 0$ і $x - y + 8 = 0$.

3.24. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 2 та 10 одиницям довжини.

4.24. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $8x - y + 3 = 0$ та $4x + 3y - 5 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.24. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(4,0), B(-4,-2), C(-2,-6), D(6,-4)$ є паралелограм. Знайти рівняння діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

6.24. Знайти відстань між прямими $5x - 2y + 5 = 0$ та $5x - 2y + 2 = 0$.

7.24. Гіпотенуза прямокутного трикутника лежить на прямій $2x + y - 2 = 0$, а точка $C(3,-1)$ є вершиною прямого кута. Площа трикутника дорівнює 2,25. Записати рівняння катетів цього трикутника.

3.25. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 3 одиницям довжини.

4.25. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x + y + 1 = 0$ та $x + 7y - 10 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.25. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(8,2), B(7,-3), C(-3,-1), D(-2,4)$ є прямокутником. Знайти рівняння діагоналей прямокутника $ABCD$. Знайти площу прямокутника $ABCD$.

6.25. Знайти відстань між паралельними прямими
 $2x - 5y + 7 = 0$ та $2x - 5y + 10 = 0$.

7.25. Відомі рівняння двох сторін паралелограма $x + y - 1 = 0$, $3x - y + 4 = 0$ і точка перетину його діагоналей $P(3,3)$. Записати рівняння двох інших сторін.

3.26. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 7 та 16 одиницям довжини.

4.26. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $3x + 2y - 8 = 0$ та $x - 4y + 6 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.26. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,4), B(0,11), C(5,6), D(4,-1)$ є ромб. Знайти точку перетину діагоналей ромба $ABCD$. Знайти площу ромба $ABCD$.

6.26. Знайти відстань між прямими $6x + 5y - 9 = 0$ та $6x + 5y - 12 = 0$.

7.26. Відомі рівняння двох висот трикутника ABC : $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ і координати його вершини $A(2,3)$. Записати рівняння сторін AB і AC .

3.27. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 13 та 3 одиницям довжини.

4.27. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x + 4y - 3 = 0$ та $6x + 3y + 2 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.27. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-2, -4)$, $B(4, -3)$, $C(3, 3)$, $D(-3, 2)$ є квадрат. Знайти точку перетину діагоналей квадрата. Знайти площу і периметр квадрата $ABCD$.

6.27. Знайти відстань між прямими $8x + y - 3 = 0$ та $8x + y - 7 = 0$.

7.27. Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC $3x + 2y = 12$, і рівняння висот (AM) $4x + y = 6$ і (BM) $x + 2y = 4$, де M - точка перетину висот. Записати рівняння сторін AB , BC .

3.28. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 9 та 15 одиницям довжини.

4.28. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x - 2y - 1 = 0$ та $2x + 5y + 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.28. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2, 4)$, $B(3, 8)$, $C(-6, 5)$, $D(-7, 1)$ є паралелограм. Знайти рівняння діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

6.28. Знайти відстань між паралельними прямими $2x + 5y + 7 = 0$ та $2x + 5y + 9 = 0$.

7.28. Відомі рівняння двох сторін ромба $2x - 5y - 1 = 0$ і $2x - 5y - 34 = 0$ і рівняння однієї його діагоналі $x + 3y - 6 = 0$. Записати рівняння другої діагоналі.

3.29. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 17 та 6 одиницям довжини.

4.29. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x - 9y - 2 = 0$ та $4x + y - 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.29. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,6)$, $B(4,5)$, $C(5,0)$, $D(1,-4)$ є трапеція. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайти площу трапеції $ABCD$.

6.29. Знайти відстань між паралельними прямими

$$7x - 4y + 2 = 0 \text{ та } 7x - 4y - 15 = 0.$$

7.29. Відомі рівняння двох сторін паралелограму $x - 2y = 0$ і $x - y = 1$ і точка перетину його діагоналей $M(3, -1)$. Знайти рівняння двох інших сторін.

3.30. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 2 та 18 одиницям довжини.

4.30. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x - y - 4 = 0$ та $4x + 6y - 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5.30. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,6)$, $B(4,5)$, $C(5,0)$, $D(1,-4)$ є трапеція. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайти площу трапеції $ABCD$.

6.30. Знайти відстань між прямими $8x - 5y + 3 = 0$ та $8x - 5y + 7 = 0$.

7.30. Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC і рівняння двох його висот (BH) $5x - 4y - 12 = 0$ і (AM) $x + y - 6 = 0$. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника.

**Тема 5 «Аналітична геометрія на площині.
Лінії другого порядку»**

Приклади розв'язання типового варіанту

1. Дано рівняння кола: $(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 32$. Знайти координати центра та радіус кола.

Розв'язання. За рівнянням (3.31) маємо:

- координати центра: $O(7, -2)$;
- радіус $R = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (од.).

2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

Розв'язання. З рівняння (3.33) у відповідності з визначеннями:

- велика вісь $2a = 2 \cdot 4 = 8$;
- мала вісь $2b = 2\sqrt{7}$.

Звідси координати вершин: $A_1(-8,0)$, $A_2(8,0)$, $B_1(0, -2\sqrt{7})$, $B_2(0, 2\sqrt{7})$.

Щоб записати координати фокусів, скористаємося основною тотожністю для еліпса і знайдемо параметр c :

$$b^2 = a^2 - c^2; \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 7 = 9; \quad c = 3.$$

Маємо координати фокусів: $F_1(-3,0)$; $F_2(3,0)$.

За формулою (3.34) знаходимо ексцентриситет еліпсу:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}.$$

Рівняння директрис (3.35) мають вигляд:

$$x = \pm d, \text{ де } d = \frac{a}{e} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}, \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{16}{3}.$$

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

Розв'язання. З рівняння (3.38) у відповідності з визначеннями:

- дійсна вісь $2a = 2 \cdot \sqrt{8} = 4\sqrt{2}$;
- умовна вісь $2b = 2\sqrt{5}$.

Звідси координати вершин: $A_1(-4\sqrt{2}, 0)$, $A_2(4\sqrt{2}, 0)$.

Щоб записати координати фокусів, скористаємося основною тотожністю для гіперболи і знайдемо параметр c :

$$b^2 = c^2 - a^2; \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 5 = 13; \quad c = \sqrt{13}.$$

Маємо координати фокусів: $F_1(-\sqrt{13}, 0)$; $F_2(\sqrt{13}, 0)$.

За формулою (3.40) знаходимо ексцентриситет гіперболи:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}}.$$

Рівняння директрис (3.41) мають вигляд:

$$x = \pm d, \text{ де } d = \frac{a}{e} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}}} = \frac{8}{\sqrt{13}}, \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{8}{\sqrt{13}}.$$

Рівняння асимптот гіперболи запишемо, скориставшись формулою (3.39):

$$y = \pm \frac{b}{a}x \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}x.$$

4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 8x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язання. З рівняння (2.44) у відповідності з визначеннями знаходимо параметр параболи:

$$2p = 8; \quad \Rightarrow \quad p = 4.$$

Фокус має координату $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $\Rightarrow F(2, 0)$. А рівняння директриси має вигляд:

$$x = -\frac{p}{2}; \quad \Rightarrow \quad x = -2.$$

5. Дано рівняння кола: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 12$. Визначити положення точки $A(2, -7)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?

Розв'язання. Підставимо координати точки A у рівняння кола:

$$(2 - 3)^2 + (-7 + 4)^2 = 1 + 9 = 10 < 12.$$

Звідси прямує, що точка лежить в середині кола. Якщо б тотожність виконувалася, це б означало, що точка належить колу. В тому ж випадку, коли між лівою та правою частинами рівняння ми б були вимушені поставити знак «>», з цього б прямувало, що точка лежить поза колом.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів $AB: A(3,8), B(-5,12)$.

Розв'язання. Щоб записати рівняння кола, необхідно визначити координати центра та радіус кола. За визначенням, центр кола поділяє будь-який з його діаметрів навпіл, тому знайдемо координати центру кола як координати середини відрізка AB (2.6), (2.7):

$$x = \frac{3-5}{2} = -1; \quad y = \frac{8+12}{2} = 10. \quad \Rightarrow \quad O_1(-1,10).$$

А радіус знайдемо як довжину відрізка AO_1 (2.1):

$$R = AO_1 = \sqrt{(-1-3)^2 + (10-8)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Отже, канонічне рівняння кола (2.31) має вигляд:

$$(x+1)^2 + (y-10)^2 = 20.$$

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що лівий фокус має координату $F_1(-1,0)$, а точка $D\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ належить еліпсу.

Розв'язання. Канонічне рівняння еліпса (3.33) має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

З умови, що точка D належить еліпсу, прямує, що її координати задовольняють рівнянню еліпса:

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2} = 1.$$

Згадаємо основну тотожність для еліпса:

$$b^2 = a^2 - c^2; \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2; \quad a^2 - b^2 = 1.$$

Отже маємо систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \\ a^2 - b^2 = 1 \end{cases}.$$

Розв'яжемо її, щоб знайти довжини великої та малої осей:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ \frac{3}{b^2+1} + \frac{3}{4b^2} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ 12b^2 + 3b^2 + 3 = 4b^4 + 4b^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ 4b^4 - 11b^2 - 3 = 0; \end{cases} \quad b^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ не задов.} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b^2 = 3 \\ a^2 = 3 + 1 = 4. \end{cases}$$

Шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{5}$, а відстань від вершини до найближчого фокуса дорівнює 2.

Розв'язання. Канонічне рівняння гіперболи має вигляд (3.38):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Щоб знайти величини дійсної та умовної півосей, складемо за умовою систему:

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{7}{5} \\ c - a = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} c = a + 2 \\ \frac{a+2}{a} = \frac{7}{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} c = a + 2 \\ 5a + 10 = 7a \end{cases}; \quad \begin{cases} c = 5 + 2 = 7 \\ a = 5 \end{cases}.$$

Скористаємося основною тотожністю для гіперболи і знайдемо умовну піввісь: $b^2 = c^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$.

Остаточно маємо:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1.$$

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = -\frac{3}{5}$.

Розв'язання. З рівняння директриси робимо висновок, що парабола симетрична відносно осі ординат, тож її рівняння має вигляд (3.45):

$$x^2 = 2py.$$

З рівняння директриси знаходимо параметр параболи :

$$y = -\frac{p}{2}; \quad -\frac{p}{2} = -\frac{3}{5}; \quad \Rightarrow \quad p = \frac{6}{5}.$$

Отже шукане рівняння параболи:

$$x^2 = \frac{12}{5}y.$$

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $4x^2 + 4y^2 + 8x - 10y - 1 = 0$.

Розв'язання. За визначенням 2.2 будь-яке рівняння другого ступеня (3.10) описує криву другого порядку. Проаналізувавши відомі нам канонічні рівняння кола, еліпсу, гіперболи, параболи, зробимо висновок, що загальне рівняння (3.30) відповідає:

- колу, якщо коефіцієнти $A = B$, $C = 0$;
- еліпсу, якщо $A \neq B$, $C = 0$, A і B одного знаку;
- гіперболі, якщо $A \neq B$, $C = 0$, A і B різних знаків;
- параболі або $A = 0$, або $B = 0$.

Отже ми маємо загальне рівняння кола. Щоб привести його до канонічного вигляду, виділимо повний квадрат (за допомогою формул квадрат суми, квадрат різниці):

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x &= 4(x^2 + 2x) = 4((x^2 + 2x + 1) - 1) = 4(x + 1)^2 - 4 \\ 4y^2 - 10y &= 4\left(y^2 - \frac{5}{2}y\right) = 4\left(\left(y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{16}\right) = \\ &= 4\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{4}; \end{aligned}$$

підставимо у рівняння

$$4(x + 1)^2 - 4 + 4\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{4} - 1 = 0;$$

$$4(x + 1)^2 + 4\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{45}{4} \quad : 4;$$

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{45}{16}.$$

Звідси координати центра кола: $O_1\left(-1, \frac{5}{4}\right)$, а радіус $R = \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(3, -4)$ і $B(1, 3)$ дорівнює 2. Зробити креслення.

Розв'язання. Будь-яка точка M кривої має координати $M(x, y)$. Складемо рівняння за умовою:

$$\frac{AM}{BM} = 2.$$

$$AM = \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2}; \quad BM = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}} = 2.$$

Виконаємо необхідні перетворення:

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4((x-1)^2 + (y-3)^2);$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 - 24y + 36;$$

$$3x^2 + 3y^2 - 2x - 32y + 15 = 0.$$

Ми отримали загальне рівняння кривої другого порядку. В задачі 10 ми провели його аналіз, отже можемо зробити висновок, що шукана крива - коло. Приведемо його рівняння до канонічного вигляду:

$$3x^2 + 3y^2 - 2x - 32y + 15 = 0 \mid : 3;$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{32}{3}y + 5 = 0;$$

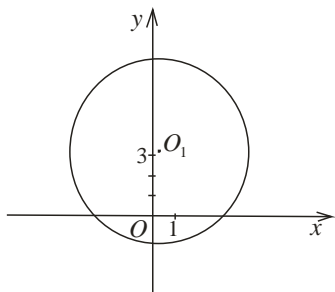
$$\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9} + \left(y^2 - \frac{32}{3}y + \frac{256}{9}\right) - \frac{256}{9} + 5 = 0;$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{16}{3}\right)^2 = \frac{212}{9}.$$

Звідси координати центра кола:

$$O_1\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}\right), \text{ а радіус } R = \frac{2\sqrt{53}}{3}. \text{ Зробимо}$$

креслення:



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 5

Завдання 5.1

1. Дано рівняння кола: $(x - 3)^2 + (y + 8)^2 = 49$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{4} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 9x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $x^2 + (y + 7)^2 = 15$.
Визначити положення точки $A(-5,3)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомо, що його центр знаходиться у точці $A(-2,9)$, а радіус дорівнює 7.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що його мала вісь дорівнює 6, а один з фокусів має координати $F(-4,0)$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її дійсна піввісь дорівнює 3 і точка $A(6, 4\sqrt{3})$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = \frac{7}{4}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-3,2)$ на відстані, в три рази більше, ніж від прямої $y = 1$. Зробити малюнок.

Завдання 5.2

1. Дано рівняння кола: $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 13$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{15} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = 8y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$. Визначити положення точки $A(0, \sqrt{3})$ відносно еліпса: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(-6, 11)$, $B(2, -9)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 16 і точка $D(8, \frac{18}{5})$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її уявна піввісь дорівнює 3 і ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{4}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = -\frac{5}{3}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку, привести до канонічного виду її рівняння: $9x^2 - 16y^2 - 6x + 8y - 144 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(1, -4)$ на відстані, в два рази менше, ніж від прямої $x = -3$. Зробити малюнок.

Завдання 5.3

1. Дано рівняння кола: $(x - 8)^2 + (y - 5)^2 = 29$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{9} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 3x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$.
Визначити положення точки $A(4, -7)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(5, -11)$ і радіус $R = 13$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет дорівнює $\frac{\sqrt{56}}{9}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що один з фокусів має координати $F(5, 0)$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{4}{3}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = 7$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $7x^2 + 7y^2 - 2x - 7y - 1 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(2, 5)$ і $B(-3, 4)$ дорівнює 34. Зробити малюнок.

Завдання 5.4

1. Дано рівняння кола: $(x + 1)^2 + (y - 7)^2 = 49$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = 5y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{3}{2}x$.
Визначити положення точки $A(6, -3)$ відносно параболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів: $A(2,5), B(-3,12)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{5}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(7\sqrt{2}, 5)$ належить гіперболі, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{5}{7}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = -\frac{3}{8}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $12x^2 - 12x - 32y - 29 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(-2,7)$ і $B(5,9)$ дорівнює $\frac{3}{2}$. Зробити малюнок.

Завдання 5.5

1. Дано рівняння кола: $x^2 + (y + 3)^2 = 28$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{8} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{5} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -\frac{7}{3}x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 43$.
Визначити положення точки $A(7,15)$ відносно кола.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-4,8)$ і радіус $R = 12$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика піввісь дорівнює 5, а ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{5}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(9\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$ належить гіперболі, а уявна вісь дорівнює 4.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -\frac{2}{9}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M відстоїть від точки $A(3, -4)$ на відстані у двічі більше ніж від прямої $y = 5$.
Зробити малюнок.

Завдання 5.6

1. Дано рівняння кола: $(x + 11)^2 + (y - 7)^2 = 12$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{16} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{81} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = \frac{6}{5}y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{2} = 1$.
Визначити положення точки $A(0,3)$ відносно еліпса.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(5,3)$ і $B(-7,-1)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 10, а ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{13}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює $2\sqrt{74}$, а уявна вісь - 10.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата її фокуса $F(0, -7)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $45x^2 - 36y^2 - 90x - 24y + 41 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M відстоїть від точки $A(2,1)$ на відстані у п'ять разів менше ніж від прямої $x = -4$. Зробити малюнок.

Завдання 5.7

1. Дано рівняння кола: $(x - 1)^2 + (y + 11)^2 = 33$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{19} - \frac{y^2}{36} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -4x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{12} = 1$.
Визначити положення точки $A(5, -6)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра кола $A(-7, -9)$ і його радіус $R = 17$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика піввісь дорівнює 13, а відстань між фокусами дорівнює 24.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{3}$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{4}{3}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата її фокуса $F(3, 0)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точок $A(-1, -5)$ і $B(-3, 4)$ дорівнює 26. Зробити малюнок.

Завдання 5.8

1. Дано рівняння кола: $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 29$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{56} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{12} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -12y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{13}{7}x$.
Визначити положення точки $A(7, -5)$ відносно параболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(2, -7)$ і $B(5, 14)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика вісь дорівнює 14, а точка $M\left(\frac{7}{\sqrt{3}}, 4\right)$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що уявна вісь дорівнює 24, а ексцентриситет $e = \frac{13}{5}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата її фокуса $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $y^2 - 4x + 4y + 16 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(9, 0)$ і $B(-5, 3)$ дорівнює $\frac{4}{3}$. Зробити малюнок.

Завдання 5.9

1. Дано рівняння кола: $(x + 13)^2 + (y - 1)^2 = 47$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{58} + \frac{y^2}{9} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{3}{13}x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$.
Визначити положення точки $A(-2, 10)$ відносно еліпса.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(14, 0)$ і радіус $R = 2\sqrt{7}$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 3, а ексцентриситет $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що дійсна вісь дорівнює 8, а точка $M(4\sqrt{3}, 9\sqrt{2})$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата її фокуса $F(0, -17)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y - 24 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від прямої $x = -4$ на відстані в чотири рази більше ніж від точки $A(-2, 6)$. Зробити малюнок.

Завдання 5.10

1. Дано рівняння кола: $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 82$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{5} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{22} - \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -\frac{7}{5}y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{14} = 1$.
Визначити положення точки $A(5,3)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(-9,13)$, $B(15, -4)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика вісь дорівнює 10, а точка $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що уявна піввісь дорівнює 4, а ексцентриситет $e = \frac{5}{3}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відоме рівняння директриси $x = \frac{11}{2}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + 4x + 2y + 4 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(9,5)$ і $B(-3,12)$ дорівнює 37. Зробити малюнок.

Завдання 5.11

1. Дано рівняння кола: $(x + 2)^2 + y^2 = 19$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{20} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 5,2x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння параболи: $x^2 = -\frac{7}{4}y$. Визначити положення точки $A(-\sqrt{14}, -8)$ відносно параболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(16, -5)$ і радіус кола $R = 5\sqrt{3}$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика вісь дорівнює 14, а ексцентриситет $e = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{3}{4}$, а ексцентриситет $e = \frac{5}{4}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата фокуса $F(-6, 0)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 7 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(-3, -2)$ і $B(-1, 5)$ дорівнює $\frac{1}{5}$. Зробити малюнок.

Завдання 5.12

1. Дано рівняння кола: $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 43$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = 13y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 15$.
Визначити положення точки $A(-4, 1)$ відносно кола.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з діаметрів кола AB : $A(-4, 9)$, $B(11, -15)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 6, а ексцентриситет $e = \frac{4}{5}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{5}{7}$ і точка $M(7\sqrt{2}, 5)$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відоме рівняння директриси $y = -\frac{3}{11}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 - 2y^2 - 6x + 4y + 1 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої віддалена від прямої $x = -5$ на відстані в чотири рази менше ніж від точки $A(-6, 0)$. Зробити малюнок.

Завдання 5.13

1. Дано рівняння кола: $(x + 6)^2 + (y - 12)^2 = 11$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{2} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -\frac{3}{7}x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{7} = 1$.
Визначити положення точки $A(0,7)$ відносно еліпса.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(-10,7)$ і радіус $R = \sqrt{5}$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 12 і точка $A(-5,4\sqrt{3})$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що уявна піввісь дорівнює 12, а відстань між фокусами дорівнює 26.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відоме рівняння директриси $x = 7,3$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + y^2 - 16x - 36y + 75 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(7,1)$ і $B(2,-5)$ дорівнює $\frac{1}{6}$. Зробити малюнок.

Завдання 5.14

1. Дано рівняння кола: $(x - 9)^2 + (y - 1)^2 = 99$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{13} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{37} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = \frac{6}{11}y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$. Визначити положення точки $A(-6\sqrt{5}, 4)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з діаметрів кола AB : $A(0, 18), B(-7, 13)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 24, а ексцентриситет $e = \frac{5}{13}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що дійсна вісь дорівнює 18, а точка $A(9\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата фокуса $F(0, -15)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + 10x - 7y + 53 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від прямої $x = -2$ на відстані в сім разів більше ніж від точки $A(-5, 8)$. Зробити малюнок.

Завдання 5.15

1. Дано рівняння кола: $(x + 14)^2 + (y - 5)^2 = 63$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{18} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -\frac{17}{2}x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння параболи: $(x + 5)^2 = 12y + 1$.
Визначити положення точки $A(-10, 2)$ відносно параболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(19, -3)$ і радіус кола $R = 7$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 3, а точка $M\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}, 1\right)$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 10, а кутовий коефіцієнт асимптоти гіперболи $k = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата фокуса $F(9, 0)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $3x^2 + 5y^2 + 54x - 40y + 308 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(3, 3)$ і $B(-7, 6)$ дорівнює 38. Зробити малюнок.

Завдання 5.16

1. Дано рівняння кола: $(x + 6)^2 + (y - 19)^2 = 20$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = 8y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 15$.
Визначити положення точки $A(5,12)$ відносно кола.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з діаметрів кола $AB: A(13,1), B(-19,8)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 8, а відстань між фокусами дорівнює 6.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що дійсна піввісь дорівнює $2\sqrt{5}$, а ексцентриситет $e = \sqrt{1,2}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відоме рівняння директриси $y = 4,7$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $3x^2 - 2y^2 - 42x - 8y + 121 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(-8, -3)$ і $B(2,5)$ дорівнює $\frac{3}{4}$. Зробити малюнок.

Завдання 5.17

1. Дано рівняння кола: $(x + 3)^2 + (y + 17)^2 = 5$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{441} + \frac{y^2}{81} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{55} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -3,5x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{12} = 1$.
Визначити положення точки $A(-1, -6)$ відносно еліпса.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(8, -13)$ і радіус кола $R = \sqrt{11}$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{4}$, а точка $M(-4, \sqrt{21})$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що відстань між вершинами дорівнює 8, а відстань між фокусами – 10.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомі координати фокуса $F(17, 0)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $y^2 - 7x + 18y + 102 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(5, -9)$ на відстані у шість разів більше ніж від прямої $y = -3$. Зробити малюнок.

Завдання 5.18

1. Дано рівняння кола: $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 40$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 8x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 74$.
Визначити положення точки $A(5, -2)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомо, що його центр знаходиться у точці $A(3, 8)$, а радіус дорівнює 6.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що його мала вісь дорівнює 5, а один з фокусів має координати $F(-3, 0)$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її уявна піввісь дорівнює 3 і точка $A(7, 9)$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -\frac{3}{5}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $9x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(5, -4)$ на відстані, в три рази більше, ніж від прямої $y = 2$. Зробити малюнок.

Завдання 5.19

1. Дано рівняння кола: $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 3$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{14} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{5} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -3y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$. Визначити положення точки $A(0, \sqrt{7})$ відносно еліпса: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(-9, 12)$, $B(5, -4)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 12 і точка $D(5, 3)$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її дійсна піввісь дорівнює 10 і ексцентриситет дорівнює $\frac{8}{5}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = \frac{5}{2}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку, привести до канонічного виду її рівняння: $4x^2 - y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-2, 3)$ на відстані, в два рази менше, ніж від прямої $x = 5$. Зробити малюнок.

Завдання 5.20

1. Дано рівняння кола: $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 11$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{16} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{12} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -6x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$.
Визначити положення точки $A(5, -8)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(6, -3)$ і радіус $R = \sqrt{5}$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 16, а ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{8}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що один з фокусів має координати $F(-8, 0)$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{3}{5}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -2$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $5x^2 + 5y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(1, 5)$ і $B(-2, 3)$ дорівнює 7. Зробити малюнок.

Завдання 5.21

1. Дано рівняння кола: $(x + 10)^2 + (y - 2)^2 = 35$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{12} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{9} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -8y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{7}{4}x$.
Визначити положення точки $A(6, -3)$ відносно параболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів: $A(6, 3), B(4, -9)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 7, а ексцентриситет дорівнює $\frac{2}{5}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(8, -3)$ належить гіперболі, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{3}{2}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = \frac{5}{8}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $2x^2 - 2x - 32y - 95 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(3, -7)$ і $B(2, 6)$ дорівнює 5. Зробити малюнок.

Завдання 5.22

1. Дано рівняння кола: $(x - 9)^2 + (y - 7)^2 = 19$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{12} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{15} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{6}{5}x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $(x + 3)^2 + (y + 10)^2 = 8$.
Визначити положення точки $A(-5, -8)$ відносно кола.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-3, 11)$ і радіус $R = 15$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика піввісь дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{4}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(7, -2)$ належить гіперболі, а уявна вісь дорівнює 4.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = \frac{2}{15}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $4x^2 + y^2 + 4x - 8y - 4 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M відстоїть від точки $A(-7, -1)$ на відстані у двічі більше ніж від прямої $y = -2$.
Зробити малюнок.

Завдання 5.23

1. Дано рівняння кола: $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 103$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{4} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -3x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $x^2 + (y - 6)^2 = 33$.
Визначити положення точки $A(-5, 3)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомо, що його центр знаходиться у точці $A(-5, 12)$, а радіус дорівнює 14.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що його мала вісь дорівнює 8, а один з фокусів має координати $F(-6, 0)$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її дійсна піввісь дорівнює 7 і точка $A(\sqrt{7}, 6)$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -4$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + 4y^2 + 8x - 4y - 12 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-5, 1)$ на відстані, в три рази більше, ніж від прямої $y = 3$. Зробити малюнок.

Завдання 5.24

1. Дано рівняння кола: $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 16$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -12y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{13} = 1$. Визначити положення точки $A(0, \sqrt{3})$ відносно еліпса: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(-10, 7)$, $B(2, 3)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 14 і точка $D(7, 2)$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її уявна піввісь дорівнює 8 і ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{5}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = \frac{5}{6}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку, привести до канонічного виду її рівняння: $16x^2 - 9y^2 - 16x + 6y - 25 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-1, -2)$ на відстані, в два рази менше, ніж від прямої $x = -5$. Зробити малюнок.

Завдання 5.25

1. Дано рівняння кола: $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 79$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{6} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -5x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{9} = 1$.
Визначити положення точки $A(4, -7)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-3, -2)$ і радіус $R = 5$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що один з фокусів має координати $F(-6, 0)$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{3}{5}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -10$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-2, 5)$ і $B(3, 1)$ дорівнює 22. Зробити малюнок.

Завдання 5.26

1. Дано рівняння кола: $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{10} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -6y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{3}{8}x$.
Визначити положення точки $A(4, -2)$ відносно параболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів: $A(12, -5), B(-4, -3)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 10, а ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{6}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(\sqrt{3}, -2)$ належить гіперболі, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{4}{3}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = \frac{5}{9}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $6x^2 - 6x - 12y - 19 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(-2, -3)$ і $B(-4, 1)$ дорівнює $\frac{5}{2}$. Зробити малюнок.

Завдання 5.27

1. Дано рівняння кола: $x^2 + (y - 11)^2 = 8$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{4} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{5}{21}x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 22$.
Визначити положення точки $A(7, -3)$ відносно кола.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-1, 9)$ і радіус $R = 16$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика піввісь дорівнює 14, а ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{7}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(-5, -2\sqrt{2})$ належить гіперболі, а уявна вісь дорівнює 4.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -\frac{7}{8}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - 10 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M відстоїть від точки $A(3, -5)$ на відстані у двічі більше ніж від прямої $y = -2$.
Зробити малюнок.

Завдання 5.28

1. Дано рівняння кола: $(x - 13)^2 + (y - 2)^2 = 53$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{75} - \frac{y^2}{64} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -8x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $x^2 + (y - 9)^2 = 24$.
Визначити положення точки $A(5, -3)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомо, що його центр знаходиться у точці $A(9, 1)$, а радіус дорівнює 13.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що його мала вісь дорівнює 4, а один з фокусів має координати $F(-5, 0)$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її дійсна піввісь дорівнює 5 і точка $A(-5, 4\sqrt{2})$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -\frac{9}{4}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $4x^2 + 9y^2 + 8x - 6y - 5 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-1, 1)$ на відстані, в три рази більше, ніж від прямої $y = -5$. Зробити малюнок.

Завдання 5.29

1. Дано рівняння кола: $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 23$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{8} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{39} - \frac{y^2}{45} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -13y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{24} = 1$. Визначити положення точки $A(-3, \sqrt{6})$ відносно еліпса: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(-8, 1)$, $B(-2, 9)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 14 і точка $D(3, -1)$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її уявна піввісь дорівнює 8 і ексцентриситет дорівнює $\frac{9}{4}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = -12$.
10. Визначити тип кривої другого порядку, привести до канонічного виду її рівняння: $9x^2 - y^2 - 6x + 10y - 48 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(1, 3)$ на відстані, в два рази менше, ніж від прямої $x = -2$. Зробити малюнок.

Завдання 5.30

1. Дано рівняння кола: $(x - 12)^2 + (y - 3)^2 = 9$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{42} + \frac{y^2}{25} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{16} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 7x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{15} = 1$.
Визначити положення точки $A(4,3)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-9, -3)$ і радіус $R = 11$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{\sqrt{5}}{3}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що один з фокусів має координати $F(-5,0)$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{5}{2}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -14$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + y^2 - 12x - 4y - 17 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-2, -3)$ і $B(-3,5)$ дорівнює 21. Зробити малюнок.

Тема 6 «АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРИ»

Приклади розв'язання типового варіанту

1. Дано координати точок:
 $A(-3; 2; 1)$, $B(4; 4; 3)$, $C(2; -3; 2)$ і $D(1; 5; -2)$. Знайти:
 а) довжину ребра AB ;
 б) рівняння ребра AD ;
 в) рівняння грані ABC ;
 г) кут між ребрами AB і AD ;
 д) кут між гранями ABC і ABD ;
 е) кут між ребром AD і гранню ABC ;
 є) рівняння і довжину висоти DK ;
 ж) площу грані BCD ;
 з) об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання:

а) довжину ребра AB обчислимо за формулою (2.2) як довжину вектора \overrightarrow{AB} :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4 - (-3))^2 + (4 - 2)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{49 + 4 + 4} = \sqrt{57} \text{ (од.)};$$

б) рівняння ребра AD запишемо за формулою (4.27):

$$\frac{x - (-3)}{1 - (-3)} = \frac{y - 2}{5 - 2} = \frac{z - 1}{-2 - 1}; \quad \frac{x + 3}{4} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 1}{-3};$$

в) рівняння грані ABC знайдемо за допомогою формули (4.11) як рівняння площини, що проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - (-3) & y - 2 & z - 1 \\ 4 - (-3) & 4 - 2 & 3 - 1 \\ 2 - (-3) & -3 - 2 & 2 - 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z - 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x + 3) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - (y - 2) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (z - 1) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x + 3) \cdot (2 + 10) - (y - 2) \cdot (7 - 10) + (z - 1)(-35 - 10) = 0;$$

$$12(x + 3) + 3(y - 2) - 45(z - 1) = 0 \quad |:3;$$

$$4(x + 3) + (y - 2) - 15(z - 1) = 0;$$

$$4x + 12 + y - 2 - 15z + 15 = 0; \quad 4x + y - 15z + 25 = 0;$$

г) кут між ребрами **AB** і **AD** знайдемо, користуючись формулами векторної алгебри. Згадаємо, що розташування прямих в просторі визначається їх напрямними векторами. Координати вектора, паралельного прямій **AD** з'ясуємо, скориставшись результатами п.б): $\overrightarrow{AD}(4; 3; -3)$. А координати вектора \overrightarrow{AB} знайдемо за формулою (2.6):

$$\overrightarrow{AB} = (4 - (-3); 4 - 2; 3 - 1) = (7; 2; 2).$$

Кут між ребрами знайдемо по формулі (4.24):

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \pm \frac{7 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{7^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{28}{\sqrt{57} \cdot \sqrt{34}} = \frac{28}{\sqrt{1938}};$$

$$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \arccos\left(\frac{28}{\sqrt{1938}}\right) \text{ і } \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \pi - \arccos\left(\frac{28}{\sqrt{1938}}\right);$$

д) кут між гранями **ABC** і **ABD** знайдемо як кут між векторами нормалі до площин (**ABC**) і (**ABD**). Вектор нормалі до площини (**ABC**) запишемо, скориставшись результатами обчислень у п.в): $\vec{N}_1(4; 1; -15)$. Знайдемо рівняння площини **ABD**:

$$\begin{vmatrix} x - (-3) & y - 2 & z - 1 \\ 4 - (-3) & 4 - 2 & 3 - 1 \\ 1 - (-3) & 5 - 2 & -2 - 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z - 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x + 3) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - (y - 2) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (z - 1) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-12(x + 3) + 29(y - 2) + 13(z - 1) = 0;$$

$$12x - 29y - 13z + 107 = 0; \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_2(12; -29; -13).$$

Кут між площинами знайдемо по формулі (4.12):

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{4 \cdot 12 + 1 \cdot (-29) - 15 \cdot (-13)}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-15)^2} \cdot \sqrt{12^2 + (-29)^2 + (-13)^2}} = \frac{48 - 29 + 195}{\sqrt{242} \cdot \sqrt{1154}} =$$

$$= \frac{214}{22\sqrt{577}} = \frac{107}{\sqrt{577}};$$

$$\angle((ABC), (ABD)) = \arccos \frac{107}{\sqrt{577}};$$

е) кут між ребром **AD** і гранню **ABC** знайдемо по формулі (4.28). Згадаємо координати напрямного вектора ребра

AD ($\vec{S}(4; 3; -3)$) і вектора нормалі до грані ABC ($\vec{N}(4; 1; -15)$). Отже,

$$\sin \varphi = \frac{4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + (-3) \cdot (-15)}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 1^2 + (-15)^2}} = \frac{64}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{242}} = \frac{64}{22\sqrt{17}} = \frac{32}{11\sqrt{17}};$$

$$\varphi = \arcsin \frac{32}{11\sqrt{17}};$$

е) рівняння висоти DK знайдемо як рівняння перпендикуляру, встановленого з вершини D на площину ABC . Згадаємо, що пряма визначається вектором, паралельним їй, а площина – вектором нормалі. Зрозуміло, що шуканий вектор, який визначає розташування висоти DK , паралельний вектору нормалі до площини ABC . З умови паралельності (2.11) маємо

$$\vec{N}(4; 1; -15) \Rightarrow \vec{S}(4; 1; -15).$$

Отже рівняння висоти DK знайдемо за формулою (4.19) (згадаємо координати точки $D(1; 5; -2)$):

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+2}{-15}.$$

Довжину DK знайдемо як відстань від точки D до площини ABC за формулою (4.16). Згадаємо координати точки $D(1; 5; -2)$ та рівняння площини ABC : $4x + y - 15z + 25 = 0$.

$$d = \frac{|4 \cdot 1 + 1 \cdot 5 - 15 \cdot (-2)|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-15)^2}} = \frac{39}{\sqrt{242}} = \frac{39}{11\sqrt{2}}.$$

ж) площу грані BCD обчислимо, скориставшись формулами векторної алгебри. Грань BCD – трикутник, площу якого знайдемо за формулою (2.18). Для підстановки у формулу знайдемо координати векторів \vec{BC} і \vec{BD} :

$$\vec{BC} = (2 - 4; -3 - 4; 2 - 3) = (-2; -7; -1);$$

$$\vec{BD} = (1 - 4; 5 - 4; -2 - 3) = (-3; 1; -5);$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{BC} \times \vec{BD}|.$$

Знайдемо спочатку векторний добуток, а потім його модуль:

$$\vec{BC} \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -7 & -1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (35 + 1)\vec{i} - (10 - 3)\vec{j} + (-2 - \\
 21\vec{k} & = 36\vec{i} - 7\vec{j} - 23\vec{k}; \\
 |\vec{BC} \times \vec{BD}| & = \sqrt{36^2 + (-7)^2 + (-23)^2} = \sqrt{1296 + 49 + 529} = \\
 & = \sqrt{1874}; \\
 \text{Отже } S & = \frac{1}{2}\sqrt{1874} \text{ (од}^2\text{)};
 \end{aligned}$$

з) об'єм піраміди $ABCD$ також обчислимо, скориставшись формулами векторної алгебри (2.20). Для цього з'ясуємо координати векторів \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} : $\vec{AB}(7; 2; 2)$; $\vec{AC}(5; -5; 1)$; $\vec{AD}(4; 3; -3)$. Обчислимо мішаний добуток:

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} & = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 105 + 8 + 30 + 40 + 30 - \\
 21 & = \\
 & = 192; \\
 V & = \frac{1}{6} |\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{6} \cdot 192 = 32 \text{ (од}^3\text{)}.
 \end{aligned}$$

2. Скласти рівняння площини, якій належать точки $M(4; 3; 1)$ і $N(-2; 0; -1)$, і яка паралельна прямій, що проходить через точки $A(1; 1; -1)$ і $B(-3; 1; 0)$.

Розв'язання: Рівняння прямої, що проходить через дві точки, має вид (4.27):

$$\begin{aligned}
 & \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \\
 \text{Звідси} \quad \frac{x-1}{-3-1} & = \frac{y-1}{1-1} = \frac{z-(-1)}{0-(-1)}, \quad \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-(-1)}{1}.
 \end{aligned}$$

Якщо площина проходить через точку $M(4; 3; 1)$, то її рівняння можна записати у вигляді

$$A(x - 4) + B(y - 3) + C(z - 1) = 0.$$

З того, що ця площина проходить і через точку $N(-2; 0; -1)$, прямує, що виконується умова

$$A(-2 - 4) + B(0 - 3) + C(-1 - 1) = 0, \quad \text{або} \quad 6A + 3B + 2C = 0.$$

Оскільки шукана площина паралельна знайденій прямій AB , то з урахуванням умови паралельності (4.29) $Am + Bn + Cp = 0$, маємо

$$-4A + 0B + 1C = 0 \quad \text{або} \quad 4A - C = 0.$$

Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} 6A + 3B + 2C = 0 \\ 4A - C = 0 \end{cases}, \quad \text{знаходимо, що} \quad C = 4A, \quad B = -\frac{14}{3}A.$$

Підставимо отримані значення C і B у рівняння шуканої площини, маємо

$$A(x - 4) - \frac{14}{3}A(y - 3) + 4A(z - 1) = 0.$$

З умови $A \neq 0$, отримане рівняння еквівалентне рівнянню

$$\begin{aligned} 3(x - 4) - 14(y - 3) + 12(z - 1) &= 0 \\ \text{або} \quad 3x - 14y + 12z + 18 &= 0. \end{aligned}$$

3. Знайти координати x_2, y_2, z_2 точки M_2 , яка симетрична точці $M_1(6; -4; -2)$ відносно площини $x + y + z - 3 = 0$.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння прямої M_1M_2 , перпендикулярної до даної площини:

$$x = 6 + t; \quad y = -4 + t; \quad z = -2 + t.$$

Підставимо вирази для x, y і z у рівняння даної площини, знайдемо t :

$$(6 + t) + (-4 + t) + (-2 + t) - 3 = 0; \quad 3t = 3; \quad t = 1,$$

і, отже, точку M перетину прямої M_1M_2 , з даною площиною:

$x = 6 + 1 = 7; \quad y = -4 + 1 = -3; \quad z = -2 + 1 = -1; \Rightarrow M(7; -3; -1)$. З того, що точка M є серединою відрізка M_1M_2 , вірні рівності:

$$7 = \frac{6+x_2}{2}; \quad -3 = \frac{-4+y_2}{2}; \quad -1 = \frac{-2+z_2}{2},$$

з яких знаходимо координати точки M_2 : $x_2 = 8; \quad y_2 = -2; \quad z_2 = 0; \quad M_2(8; -2; 0)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 6

1. Дано координати точок: A, B, C і D . Знайти:

- а) довжину ребра AB ;
- б) рівняння ребра AD ;
- в) рівняння грані ABC ;
- г) кут між ребрами AB і AD ;
- д) кут між гранями ABC і ABD ;
- е) кут між ребром AD і гранню ABC ;
- є) рівняння і довжину висоти DK ;
- ж) площу грані BCD ;
- з) об'єм піраміди $ABCD$.

№ в-та	A	B	C	D
1	(3, 1, 4)	(-1, 6, 1)	(-1, 1, 6)	(0, 4, -1)
2	(3, -1, 2)	(-1, 0, 1)	(1, 7, 3)	(8, 5, 8)
3	(3, 5, 4)	(5, 8, 3)	(1, 2, -2)	(-1, 0, 2)
4	(2, 4, 3)	(1, 1, 5)	(4, 9, 3)	(3, 6, 7)
5	(9, 5, 5)	(-3, 7, 1)	(5, 7, 8)	(6, 9, 2)
6	(0, 7, 1)	(2, -1, 5)	(1, 6, 3)	(3, -9, 8)
7	(5, 5, 4)	(1, -1, 4)	(3, 5, 1)	(5, 8, -1)
8	(6, 1, 1)	(4, 6, 6)	(4, 2, 0)	(1, 2, 6)
9	(7, 5, 3)	(9, 4, 4)	(4, 5, 7)	(7, 9, 6)
10	(6, 8, 2)	(5, 4, 7)	(2, 4, 7)	(7, 3, 7)
11	(4, 2, 5)	(0, 7, 1)	(0, 2, 7)	(1, 5, 0)
12	(4, 4, 10)	(7, 10, 2)	(2, 8, 4)	(9, 6, 9)
13	(4, 6, 5)	(6, 9, 4)	(2, 10, 10)	(7, 5, 9)
14	(3, 5, 4)	(8, 7, 4)	(5, 10, 4)	(4, 7, 8)
15	(10, 9, 6)	(2, 8, 2)	(9, 8, 9)	(7, 10, 3)
16	(1, 8, 2)	(5, 2, 6)	(5, 7, 4)	(4, 10, 9)
17	(6, 6, 5)	(4, 9, 5)	(4, 6, 11)	(6, 9, 3)
18	(7, 2, 2)	(-5, 7, -7)	(5, -3, 1)	(2, 3, 7)
19	(8, -6, 4)	(10, 5, -5)	(5, 6, 8)	(8, 10, 7)
20	(1, -1, 3)	(6, 5, 8)	(3, 5, 8)	(8, 4, 1)
21	(1, -2, 7)	(4, 2, 10)	(2, 3, 5)	(5, 3, 7)
22	(4, 2, 10)	(1, 2, 0)	(3, 5, 7)	(2, -3, 5)

23	(2, 3, 5)	(5, 3, -7)	(1, 2, 7)	(4, 2, 0)
24	(5, 3, 7)	(-2, 3, 5)	(4, 2, 10)	(1, 2, 7)
25	(4, 3, 5)	(1, 9, 7)	(0, 2, 0)	(5, 3, 10)
26	(3, 2, 5)	(4, 0, 6)	(2, 6, 5)	(6, 4, -1)
27	(2, 1, 6)	(1, 4, 9)	(2, -5, 8)	(5, 4, 2)
28	(2, 1, 7)	(3, 3, 6)	(2, -3, 9)	(1, 2, 5)
29	(2, -1, 7)	(6, 3, 1)	(3, 2, 8)	(2, -3, 7)
30	(0, 4, 5)	(3, -2, 1)	(4, 5, 6)	(3, 3, 2)

Розв'язати наступні задачі:

2.1. Знайти величини відрізків, які відсікає на осях координат площина, що проведена через точку $M(-2; 7; 3)$ паралельно площині $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

3.1. Довести паралельність прямих $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ і $\begin{cases} x - 2y + 2z - 8 = 0 \\ x + 6z - 6 = 0 \end{cases}$.

2.2. Скласти рівняння площини, яка проходить через середину відрізка M_1M_2 , перпендикулярно цьому відрізку, якщо $M_1(1; 5; 6)$, $M_2(-1; 7; 10)$.

3.2. Довести, що пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ паралельна площині $2x + y - z = 0$, а пряма $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{3}$ лежить у цій площині.

2.3. Знайти відстань від точки $M(2; 0; -\frac{1}{2})$ до площини $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

3.3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1; -3; 3)$ і утворює з осями координат кути у 60° , 45° і 120° відповідно.

2.4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; -3; 5)$ паралельно площині xOy .

3.4. Довести, що пряма $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{6}$ перпендикулярна до прямої $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$.

2.5. Скласти рівняння площини, якій належить вісь Ox і точка $A(2; 5; -1)$.

3.5. Скласти параметричні рівняння медіани трикутника з вершинами: $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 1; -4)$ і $C(0; 2; 3)$, яка проведена з вершини C .

2.6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2; 5; -1)$, $B(-3; 1; 3)$ паралельно вісі Oy .

3.6. При якому значенні n пряма $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{n} = \frac{z}{1}$ буде паралельна прямій $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases}$.

2.7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; 5; -1)$ і пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

3.7. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ з площиною $2x + 3y + z - 1 = 0$.

2.8. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі: $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ і $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

3.8. Знайти проекцію точки $A(3; 1; -1)$ на площину $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

2.9. Скласти загальне рівняння прямої, утвореної перетином площини $x - y - 7z + 9 = 0$ з площиною, яка проходить через вісь Ox і точку $A(3; 2; -5)$.

3.9. При якому значенні C площини $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ і $x + 3y + 2z + 5 = 0$ будуть перпендикулярні?

2.10. Скласти рівняння площини «у відрізках», якщо вона проходить через точку $M(6; -10; 1)$ і відсікає на вісі Ox відрізок $a = -3$, а на вісі Oz – відрізок $c = 2$.

3.10. При якому значенні A площина $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ паралельна прямій $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$?

2.11. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; 3; -4)$ паралельно двом векторам $\vec{a}(4; 1; -1)$ і $\vec{b}(2; -1; 2)$.

3.11. При яких значеннях n і C пряма $\frac{x-1}{n} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-1}$ перпендикулярна площині $3x - 2y + Cz + 1 = 0$?

2.12. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1; 1; 0)$ і $B(2; -1; -1)$ перпендикулярно до площини $5x + 2y + 3z - 7 = 0$.

3.12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат паралельно прямій $\{x = 2t + 5; y = -3t + 1; z = -7t - 4\}$.

2.13. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до двох площин: $2x - 3y + z - 1 = 0$ і $x - y + 5z + 3 = 0$.

3.13. Перевірити, чи належать точки $A(0; 0; 2)$, $B(4; 2; 5)$ і $C(12; 6; 11)$ одній прямій.

2.14. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(3; -1; 2)$ і $B(2; 1; 4)$ паралельно вектору $\vec{a}(5; -2; -1)$.

3.14. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; -5; 3)$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$.

2.15. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до вектора \overrightarrow{AB} , якщо $A(5; -2; 3)$, $B(1; -3; 5)$.

3.15. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; -3; 4)$ і перпендикулярна до прямих $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$ і $\frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}$.

2.16. Знайти величини відрізків, які відсікає на осях координат площина, що проведена через точку $M(-2; 7; 3)$ паралельно площині $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

3.16. При яких значеннях A і B площина $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$?

2.17. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1; -1; 2)$, перпендикулярно відрізку M_1M_2 якщо $M_1(2; 3; -4)$, $M_2(-1; 2; -3)$.

3.17. Показати, що пряма $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-1}{-9}$ паралельна площині $x + 3y - 2z + 1 = 0$, а пряма $\{x = t + 7; y = t - 2; z = 2t + 1\}$ лежить у цій площині.

2.18. Показати, що пряма $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-1}{-9}$ паралельна площині $x + 3y - 2z - 1 = 0$, а пряма $\{x = t; y = t - 2; z = 2t + 1\}$ лежить у цій площині.

3.18. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oz і точку $A(-3; 1; -2)$.

2.19. Скласти загальне рівняння площини, яка проходить через точку $A(3; -4; 1)$ паралельно координатній площині xOy .

3.19. Показати, що прямі $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ і $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$ перпендикулярні.

2.20. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oy і точку $M(3; -5; 2)$.

3.20. При якому значенні D пряма $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$ перетинає вісь Oz .

2.21. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M(3; -1; 2)$, $N(2; 1; 4)$ паралельно вісі Oz .

3.21. При якому значенні p прямі $\begin{cases} x = 2t + 5; \\ y = -t + 2; \\ z = pt - 7 \end{cases}$ і $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$ паралельні?

2.22. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; 3; -1)$; і пряму $\begin{cases} x = t - 3; \\ y = 2t + 5; \\ z = -3t + 1 \end{cases}$.

3.22. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}$ і площини $3x - y + 2z - 8 = 0$.

2.23. Знайти проекцію точки $M(4; -3; 1)$ на площину $x - 2y - z - 15 = 0$.

3.23. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; -5; 3)$ паралельно площині xOz .

2.24. Визначити при якому значенні B площини $x - 4y + z - 1 = 0$ і $2x + By + 10z - 3 = 0$ будуть перпендикулярні.

3.24. Скласти загальні рівняння прямої, утвореної перетином площини $x + 2y - z + 5 = 0$ і площини, яка проходить через вісь Oy і точку $M(5; 3; 2)$.

2.25. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; -3; -4)$ і відсікає на осях координат відрізки однакової величини.

3.25. При яких значеннях B і D пряма $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$ лежить у площині xOy ?

2.26. При яких значеннях A і n пряма $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{n} = \frac{z+5}{6}$ перпендикулярна до площини $Ax + 2y - 2z - 7 = 0$?

3.26. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; 3; 3)$ паралельно двом векторам $\vec{a}(-1; -3; 1)$ і $\vec{b}(4; 1; 6)$.

2.27. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2; 3; -1)$ і $B(1; 1; 4)$ перпендикулярно до площини $x - 4y + 3z + 2 = 0$.

3.27. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3; 4; 5)$ паралельно вісі Ox .

2.28. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до площин $x + 5y - z + 7 = 0$ і $3x - y + 2z - 3 = 0$.

3.28. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; 3; 1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

2.29. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2; 3; -5)$ і $B(-1; 1; -6)$ паралельно вектору $\vec{a}(4; 4; 3)$.

3.29. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1; -5; 3)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$ і $\{x = 3t + 1; y = -t - 25; z = 2t + 3\}$.

2.30. З'ясувати, при якому значенні C площини $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ і $x - 3y + 3z + 5 = 0$ будуть перпендикулярні.

3.30. Знайти точку, яка симетрична точці $A(4; 3; 10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

Тема 7 «ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ»

Приклади розв'язання типового варіанту

Обчислити границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3 - x^2 + 8x - 3}{3x^2 - 7x - 45}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3 - x^2 + 8x - 3}{3x^2 - 7x - 45} &= \frac{2(-4)^3 - (-4)^2 + 8 \cdot (-4) - 3}{3(-4)^2 - 7 \cdot (-4) - 45} = \\ &= \frac{-128 - 16 - 32 - 3}{48 + 28 - 45} = -\frac{179}{31}. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $-\frac{179}{31}$.

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$, функція представлена у вигляді відношення многочленів, отже за правилом зі стор. 139 розкладемо многочлени на множники, скоротимо й отримаємо результат:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8} &= \left| \frac{4 - 6 + 2}{8 - 8} \right| = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)}{(x^2 + 2x + 4)} = \frac{2-1}{4+4+4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{1}{12}$.

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 6x + 4}{2x^3 - x^2 - 5}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, функція представлена у вигляді відношення многочленів, отже за правилом зі стор. 140 скоротимо чисельник та знаменник на найбільший степінь - x^3 . Скористаємося табл. 5.2, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 6x + 4}{2x^3 - x^2 - 5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^3}} = \frac{7}{2}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{7}{2}$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3 + 3x^2 - 9}{5x^8 - 4x^5 - 13x}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, функція представлена у вигляді відношення многочленів, отже за правилом зі стор. 140, скоротимо чисельник та знаменник на найбільший степінь - x^8 . Скористаємося табл. 5.2, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3 + 3x^2 - 9}{5x^8 - 4x^5 - 13x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{8}{x^5} + \frac{3}{x^6} - \frac{9}{x^8}}{5 - \frac{4}{x^3} - \frac{13}{x^7}} = \frac{0}{5} = 0.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює **0**.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 2x + 11}{x^2 - 3x - 9}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, функція представлена у вигляді відношення многочленів, отже за правилом зі стор. 140, скоротимо чисельник та знаменник на найбільший степінь - x^4 . Скористаємося табл. 5.2, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 2x + 11}{x^2 - 3x - 9} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{11}{x^4}}{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{9}{x^4}} = \frac{4}{0} = \infty.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює ∞ .

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + 3x} - 3\sqrt[7]{x^9}}{\sqrt{x^{13} + 5x} - 6\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, отже за формулою (5.9), нам достатньо порівняти максимальні степені чисельника і знаменника:

- в чисельнику $\frac{5}{2}$ і $\frac{9}{7}$;
- в знаменнику $\frac{13}{9}$ і $\frac{1}{3}$.

Максимальний степінь $\frac{5}{2}$ - в чисельнику, тому за формулою (5.9), функція прямує до нескінченності.

Відповідь. Границя функції дорівнює ∞ .

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x^2-x-6}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$, функція має ірраціональність, тому за правилом зі стор. 142, позбавимось ірраціональності в чисельнику розкладемо знаменник на множники, скоротимо отриманий вираз на $(x-3)$, маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x^2-x-6} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2-5}-2)(\sqrt{x^2-5}+2)}{(x-3)(x+2)(\sqrt{x^2-5}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5-4}{(x-3)(x+2)(\sqrt{x^2-5}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)(\sqrt{x^2-5}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)}{(x+2)(\sqrt{x^2-5}+2)} = \frac{3+3}{(2+3)(\sqrt{3^2-5}+2)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{3}{10}$.

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{9x^2}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$; функція тригонометрична, тому для позбавлення невизначеності необхідно скористатися першою чудовою границею (5.10). Для того, щоб функцію, границю якої ми обчислюємо, звести до першої чудової границі, необхідно виконати певні перетворення, а саме: скористатися формулою різниці косинусів:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{9x^2} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{3x+7x}{2} \sin \frac{3x-7x}{2}}{9x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 5x \sin 2x}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin 5x \cdot \sin 2x \cdot 5 \cdot 2}{9 \cdot 5x \cdot 2x} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 2}{9} = \frac{20}{9}. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{20}{9}$.

$$9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{\pi - 2x}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$; функція тригонометрична, тому для позбавлення невизначеності необхідно скористатися першою чудовою границею (5.10). Але першою чудовою границею ми можемо скористатися лише в тому випадку, коли аргумент прямує до нуля. Тому спочатку зробимо заміну змінної, а далі, скориставшись формулами зведення, тригонометричними тотожностями, зведемо границю до першої чудової:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{\pi - 2x} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \left[\begin{array}{l} y = \frac{\pi}{2} - x \\ x = \frac{\pi}{2} - y \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} y}{2y} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\cos y \cdot y} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\cos y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{1}{2}$.

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+4}{6x-3} \right)^{5x-1}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $|1^\infty|$. Саме друга чудова границя допоможе нам впоратися з цією проблемою. Виконаємо необхідні перетворення:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+4}{6x-3} \right)^{5x-1} &= |1^\infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6x+4}{6x-3} - 1 \right)^{5x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6x+4-6x+3}{6x-3} \right)^{5x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{6x-3} \right)^{5x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{7}{6x-3} \right)^{\frac{6x-3}{7}} \right)^{\frac{7}{6x-3} (5x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7(5x-1)}{6x-3}} = e^{\frac{35}{6}}. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $e^{\frac{35}{6}}$.

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x-3}{3x+2} \right)^{4x+5}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію. Бачимо, що не зважаючи на те, що функція, границю якої ми обчислюємо, за структурою нам нагадує приклад 10, ніякої невизначеності тут нема, тому що дріб прямує до $\frac{8}{3}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x-3}{3x+2} \right)^{4x+5} = \left(\frac{8}{3} \right)^{\infty} = \infty.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює ∞ .

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1+5x}-1}{12x}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$. Зведемо функцію до вигляду (5.14) й скористаємося теоремою 3 з теми «Три чудових границі»:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1+5x}-1}{12x} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+5x)^{\frac{1}{7}}-1}{12x} = \\ &= \frac{5}{12} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+5x)^{\frac{1}{7}}-1}{5x} = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{84}. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{5}{84}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 7

Завдання 7.1.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 + 3x^2 - 14x + 7}{2x^2 + 7x + 13};$

2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 7x - 1}{5x^2 + 4x + 12};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 4x}{4x^3 + 2x^2 - 6};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x - 13}{5x^3 + 4x - 7};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - 2x};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-7}\right)^{3x+4};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+2}{3x-7}\right)^{2x+5};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{5x}.$

Завдання 7.2.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 15}{x^3 - 3x^2 + 7};$

2. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 + 4x + 3};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 6x + 13}{x^2 - 2x^3 + 5};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^7 - 3x^5 + 4x^4}{6x^3 + 3x^2 + 14};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 8x + 1}{3x^4 - 4x^3 + 2x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^{10} + 3x} + 7x^2}{\sqrt[3]{x^4 - 7x} + 2\sqrt{x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4} - 4}{x^2 - 5x + 4};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \operatorname{tg} 2x;$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+2}\right)^{x+3};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-6}{5x+4}\right)^{x-12};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{6x}.$

Завдання 7.3.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x + 9}{3x^4 - 15};$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + x - 2};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x + 2}{3x^3 + x - 15};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 6x^2 + 4}{2x^2 - 3x - 17};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^3 - 3x^4}{2x^4 + 7x^3 + 5};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^7 + 4} + \sqrt[4]{3x^3 - 1}}{\sqrt[6]{x^8 + 7x^7 + 3} - x};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sqrt{x^2 + 16} - 4};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{5x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 4}{5x + 3} \right)^{2x + 1};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 7}{9x + 2} \right)^{4x + 5};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + 4x} - 1}{7x}.$

Завдання 7.4.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 + 6x - 1}{3x^2 + 5x + 14};$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{27x^3 - 1}{3x^2 + 5x - 2};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x - 12}{7x^2 + 3x + 8};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^6 + 2x^5 - 7x^3}{2x^4 + 4x^2 + 5};$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x^2 - 17}{5x^4 - 6x^3 + 14x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[4]{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^4 + 1} - \sqrt[5]{x^3 + 2}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{7x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x;$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 6}{x - 5} \right)^{7x - 1};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 4}{3x - 2} \right)^{7x + 9};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{4x}.$

Завдання 7.5.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^3 + 3x^2 + 14}{2x^2 + 7x - 9};$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 5x - 5}{2x^2 + 3x - 2};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^2 - 4x + 13}{5x^3 + x^2 + 24};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 2x^2 - 7x}{3x^2 + 4x + 8};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 7x + 2x^3}{4x^3 + 6x^2 + 15};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 5} + \sqrt[5]{x^3 + 2}}{\sqrt[3]{x^7 + 4}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 3x + 10};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+3}\right)^{9x-11};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{2x-1}\right)^{3x-9};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{3x^2 - 5x};$

Завдання 7.6.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{21x^2 + 6x - 17}{3x^4 + 9x^2 + 5};$

2. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 9x + 14}{49 - x^2};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + x + 8}{3x^3 + 2x + 1};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x + 2x^5 - 7x^3}{3x^2 + 7x - 9};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - x^5 + 3x^2}{9x^5 + 4x^2 + 13x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^6 + 2} - \sqrt[3]{x^5 + 4}}{\sqrt[8]{x^4 + 3x} + \sqrt[3]{x^2 + 13}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{x^2 - 3x + 2};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 + 6x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4}\right)^{3x+5};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-3}{2x+5}\right)^{2x-1};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{(1+x)^3} - 1}{5x};$

Завдання 7.7.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{5x^2 + 4x - 35}{324 - x^2};$
2. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{125 + x^3}{x^2 + 8x + 15};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 9x^2 - 4x}{5x^2 - x - 24};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^4 - 3x^2 - 5x}{3x^2 + 7x - 9};$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x + 9}{8x^3 + 3x^2 + 14x};$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^7 - 13} + \sqrt{x^4 + 9}}{2x^2 - \sqrt[6]{x^5 + 3}};$
7. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{4x + 5} - 5};$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 4x};$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 3}{5x - 1} \right)^{4x + 2};$
11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x - 1}{9x + 13} \right)^{7x + 2};$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 8x)}{x^2 + 5x}.$

Завдання 7.8.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 13x}{2x^2 + 5x - 11};$
2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x + 9}{7x^2 + 3x - 1};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 7x^4 + 3x^2}{4x^3 + 6x + 15};$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 - 7x - 9}{2x^4 + 9x^3 + 3x};$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{x^4 + 2} - \sqrt[5]{x^3}}{\sqrt{x + 7} + 9x};$
7. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{3x - 5} - 4}{x^2 - 49};$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 5x}{\sin 4x};$
9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \operatorname{tg} 2x;$
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x + 1}{7x + 3} \right)^{x + 2};$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 8}{6x + 5} \right)^{-2x + 3};$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{x - 2^x}}{3x}.$

Завдання 7.9.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 2x^2 + 7x - 1}{2x^4 + 15};$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 9x - 5}{4x^2 - 1};$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 - 2x^2 + x^4}{3x^4 - 5x^3 - 11x};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 - 9}{3x^3 + 2x + 11};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x - 5}{3x^4 - 6x^2 + 7};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 7} + 4x}{6\sqrt{x^5 + 14x} - 2\sqrt[9]{x^{10}}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{2x + 15} - 3}{x^2 - x - 12};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 4x}{9x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+5}{8x+3}\right)^{x-9};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-1}{9x+5}\right)^{x+8};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3+x) - \ln 3}{x}.$

Завдання 7.10.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{4x^3 + 2x + 17}{3x^2 - 2x - 11};$

2. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x - 6};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x - 17}{2x^2 + 4x^3 - 5x};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^7 + 6x^5 + 4x^3}{5x^4 + 3x - 11};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 9x + 1}{x^5 - 6x^4 + x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^3 + 2} + \sqrt[4]{x^6 + 3x}}{\sqrt[7]{x^6 + 2x} + \sqrt[8]{x^9 + 5}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{\sqrt{x+10} - 3};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 3x}{\sin 5x + \sin x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3}{4x+5}\right)^{3x-1};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+7}{9x-3}\right)^{2-5x};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{x}.$

Завдання 7.11.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^3 - 7x^2 + 3x + 9}{x^2 + 11x + 6};$

2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9x + 20};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 6x}{5x^4 - 7x - 12};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 - 7x}{2x^3 + 11x - 3};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x + 2}{5x^3 + 2x + 13};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{x^3+2}}{\sqrt[4]{x^5+7x-2x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{5x-1} - 3};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{tg} 7x;$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \operatorname{tg} 2x;$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x-5} \right)^{7x+5};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-4}{3x-2} \right)^{8x+9};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{(1+2x)^3} - 1}{5x}.$

Завдання 7.12.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{17 - 6x^2 + 3x^4}{x^2 - 9x - 1};$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 9x + 2}{x^2 - 4x};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 19x}{9x^4 - x + 15};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 2x^3 - 7x}{2x^3 + 3x - 11};$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^2 + 6x + 5}{x^7 + 3x^2 + 4x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^5+4} + \sqrt[4]{x^3-2}}{\sqrt[4]{x^6+2x^5-1-4x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+5} - 1}{x^3 + 64};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x - \sin 7x}{x \cdot \cos 4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{\frac{1}{2} - \cos x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+5} \right)^{4x+3};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x+6}{8x-1} \right)^{2x+7};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5+x) - \ln 5}{4x}.$

Завдання 7.13.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^3 - 5x - 1}{4x^2 + 5x + 10};$

2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 8x + 15};$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x^2 - 15}{2x^3 + 6x - 1};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 + 6x^2 + 3}{3x^3 + 2x + 9};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 2}{3x^4 - x^3 - 4x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 2} + \sqrt[3]{x^2 + 9}}{\sqrt[5]{x^5 - 2} + \sqrt[6]{x^2 + 7}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{5x-4} - 3\sqrt{x-4}}{x^2 - 64};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 5x - \cos^2 x}{6x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x-1}{9x-3} \right)^{6x+2};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x-1}{4x+1} \right)^{9x+8};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 7^x}{4x}.$

Завдання 7.14.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{7x^2 - 3x - 15}{3x^3 + 2x^2};$

2. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 36};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6x - 9}{5x^2 - 7x - 11};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 + 9x^3 + 5x^2}{3x^3 + 5x + 17};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - 7}{x^6 + 2x^5 + 8x^3};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^6 + 3} + \sqrt[4]{x^5 + 2x}}{4x - \sqrt[6]{x^3 + 4x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+3}}{x^2 - 5x + 6};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 4x}{\sin 8x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+7} \right)^{x-3};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{5x+4} \right)^{2x-3};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{x^2 + 4x}.$

Завдання 7.15.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 7x^2 + x + 15}{2x^2 - 6x - 1};$

2. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 4x - 21};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 2x^2 - x^3}{13 + 4x + 6x^3};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 + 3x^2 - 4}{2x^2 - 6x - 1};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x + 3}{19x^3 + 7x - 8};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^4 + 6} + \sqrt[10]{x^6 + 9}}{\sqrt[4]{x^2 + 4x - 1} + 3\sqrt{x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+11}}{x^2 + 7x + 10};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 4x^2}{\sin 11x + \sin x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\sin 3x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x-7} \right)^{x+3};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-1}{7x+1} \right)^{-4x+3};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+7x)^4 - 1}}{3x}.$

Завдання 7.16.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^4 - 265}{3x^2 - 9x - 13};$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 5x + 4};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 5x - 3}{2x^3 + 4x^2 + 3x};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^9 - 7x - 1}{5x^4 - 13x^2 + 8x};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 3x - 5}{9x^4 - x^3 - 2x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^9 + 14} + 3x^2}{\sqrt[5]{x^3 + 2} + \sqrt{x^4 - 7}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{3x+16} - 2}{x^2 + x - 12};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 5x}{3x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \operatorname{tg} 2x;$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+6} \right)^{7x+9};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x+5}{2x-1} \right)^{2x-6};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{11x}.$

Завдання 7.17.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{11x^4 + 3x^3 + 18x}{9x^2 - 6x + 5};$

2. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x + 6}{x^3 + 27};$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - 2x^2 - 9}{5x + 13x^2 + 6x^4};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 9x^3 + 8}{5x^2 + 6x - 1};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 11}{5x^3 + 4x^2 + 13x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 5x} + \sqrt{x}}{4\sqrt{x^3 + 2x} + 5\sqrt{2x^4 - 3x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{5}}{x^2 + 6x};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + \sin x}{4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+5}{7x+4} \right)^{x+13};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+9}{5x-1} \right)^{x+3};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 2^x}{5x}.$

Завдання 7.18.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 6x + 9}{13 - x - x^2};$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{4x^2 + 11x - 3}{16x^2 - 1};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + x^3 + 3x}{9x^5 - x^4 - 34};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 + 7x + 14}{x^2 - 6x - 5};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 9}{4x^4 + 5x^2 + 3x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3x^3 + 4} + \sqrt[5]{x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt[6]{x^4 + 3}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{\sqrt{5x} - 1 - 3};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 6x}{x^2 + 3x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+1} \right)^{5x-1};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x-3}{7x-3} \right)^{4x+5};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{8x} - e^{4x}}{3x}.$

Завдання 7.19.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 15}{5x^2 - 6};$

2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 2x + 15};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 9x - 11}{5x^2 + 14x + 3};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 6x + 8}{2x^2 + 3x + 19};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 3x - 1}{5x^3 + 4x^2 - 15};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - \sqrt{8x^2 - 6}}{4\sqrt{x^3 + 2} + 5\sqrt{x^2 - 7x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6x+16} - 2}{\sqrt{x+5} - \sqrt{3}};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{5x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right);$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-11}{x+7} \right)^{4x-13};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x+4}{7x-2} \right)^{3x-5};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[9]{(1+5x)^2} - 1}{4x}.$

Завдання 7.20.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3 + 6x^2 + 13x}{x^3 - 3x^2 + 7};$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 9};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 11x + 13x^2}{5x^2 + 4x - 9};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 3x^4 - x}{4x^2 + 2x - 17};$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 3x - 8}{2x^4 + 6x^3 - 3};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 - 9} - \sqrt[4]{x^3 + 2x^2}}{5\sqrt{x^6 + 1} - 12};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 7x}{\sqrt{x+16} - 4};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin^2 4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - 2\pi)^2};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x+5} \right)^{3x+6};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x-5}{8x+3} \right)^{4x+12};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(6+x) - \ln 6}{3x}.$

Завдання 7.21.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x^3 + 6x - 14}{84 - x^4};$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 4};$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 7x^2 + 9}{5 - 3x - 9x^3};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 9x}{4x^3 + 6x^2 - 15};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 + 5x}{5x^5 - x^3 + 6x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^4 + 3} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[7]{x^8 - 3} + 5x};$

7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{\sqrt{x+1} - 2};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x \cdot \arcsin x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x-9} \right)^{2x+5};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{10x+3}{7x-5} \right)^{4x-3};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 1}{x^3 - 2x^2}.$

Завдання 7.22.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^3 - 4x^2 + 3x + 9}{5x^2 - 6x - 1};$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 11x + 18}{x^2 + 3x - 10};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - x - 15}{4x^2 + 2x + 3};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 5x^2 + 4}{x^2 - 11x + 3};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - x - 11}{2x^5 + x^4 + 9x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 6} + 2\sqrt[5]{x^4}}{6\sqrt{x^5 + 3} + 13};$

7. $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{\sqrt{x+11} - 2}{x^2 + 6x - 7};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 5x}{1 - \cos^2 3x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{ctg} x;$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+4} \right)^{11x+3};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-7}{3x+10} \right)^{5-6x};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{5x^3}.$

Завдання 7.23.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^3 - 9x^2 - 5}{3x^2 - 112};$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 3x + 2};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - x^2 + 13}{5x^2 - 7x - 1};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 + 2x^2 - 9x}{3x^4 - 5x^2 + 16};$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^2 - 6x - 5}{7x^3 + 4x^2 + 13};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 7} + \sqrt[9]{x^2 + 5}}{\sqrt[5]{x^7 + 2x + 3} + 3x};$

7. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin^2 4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin \frac{3x}{2}}{\left(\frac{\pi}{3} - x\right)^2};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+5}{6x-4}\right)^{2x-7};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+4}{2x+1}\right)^{10x-1};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{(1+5x)^7} - 1}{2x}.$

Завдання 7.24.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3 - 9x^2 + 3x}{5x^2 - 9x + 13};$

2. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 36};$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x - x^3}{5x^2 + 2x^3 + 4};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 9x^2 + 5}{5x^2 + 9x - 12};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x - 12}{3x^3 + 6x - 8};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^3 + 2x^2} + 6\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^4 + 9x} + \sqrt[12]{x^8 + 3x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{\sqrt{x+9} - \sqrt{3}}{x^2 + 4x - 12};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 5x - \cos^2 x}{x \cdot \operatorname{tg} 4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\frac{\pi}{4} - x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x-7}\right)^{5x-3};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+3}{4x-1}\right)^{-3x+12};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5+x) - \ln 5}{x^2 + x}.$

Завдання 7.25.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 + 3x - 12}{3x^2 - 9x + 42};$

2. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 64}{x^2 + 3x - 4};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^2 + 6x + 20}{4x^3 + 7x^2 + 25x};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 5x + 4}{3x^2 + 6x + 13};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 14x - 13}{5x^2 + 6x - 7};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 - 1} + 2x^2}{8\sqrt{x^7 + 6} + 3\sqrt{x^2 + 4}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+15} - 2}{\sqrt{x+8} - 3};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg 3x}{\sin 5x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\sin 3x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-7}{3x+2} \right)^{5x+2};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-4}{9x-3} \right)^{2x-7};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x^2}{5x^2}.$

Завдання 7.26.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{13 - 2x - 4x^3 - 7x^5}{12x^3 + 16x - 9};$

2. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{125 + x^3}{x^2 - 6x + 5};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 - 9}{4 - 2x + 7x^3};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 + 7x^3 + 13x}{2x^3 + 4x^2 + 9};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 8x^2 - 1}{7x^8 + 4x^4 + 2x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{x^4 - 7} + 6\sqrt{x^4 - 1}}{3\sqrt{x^2 + 4} + 5x};$

7. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{\sqrt{3x+10} - 1};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 5x}{6x};$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)tg \frac{\pi x}{2};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+6}{2x-9} \right)^{2x-1};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{3x+6} \right)^{2x+5};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{4x}}{3x}.$

Завдання 7.27.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^3 - 4x^2 + 6x - 17}{9x^2 + 7x - 2};$

2. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 16};$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2 + 8x + 1}{4x^2 - 10x + 3};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 7x^2 + 13x}{2x^3 + 4x^2 + 9};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 7}{5x^4 + 2x^3 + 6x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sqrt[7]{x^8 + 13}}{\sqrt[5]{x^6 + 3} + \sqrt[6]{x^8 + 4x^3}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\sqrt{4x + 9} - 1};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x}{\sin 2x - \sin 4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{t g \pi x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+9}{x-7} \right)^{8x+1};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7x+4}{5x+3} \right)^{12x+5};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+3x)^2} - 1}{4x}.$

Завдання 7.28.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 15x - 1}{3x^3 + 9x + 14};$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 9x + 14};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x - 1}{7x^2 + 4x + 3};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 6x + 19}{x^2 + 7x + 1};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6x - 7}{9x^3 + 8x^2 + 14};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^4 + 3x^2 + 5} + \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[4]{x^3 + 7x} + \sqrt[9]{x^6 + 5x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2 + 5x};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{x^2 - 8x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+9} \right)^{5x-9};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{x+5} \right)^{-3x+7};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+8x) - 1}{x^3 + 3x}.$

Завдання 7.29.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^3 - 6x^2 + 5x - 17}{2x^3 - 9x - 3};$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - x - 5}{x^2 - 6x + 5};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x - 2x^2 - 11x^3}{5x^2 + x^3 - 16};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 + 6x^3 + 5}{2x^2 - 11x - 1};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 4x^2 + 13}{3x^4 - 14x^3 + 17};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[9]{x^6 + 5x} + \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt[7]{x^8 + 3x^2} + \sqrt{4x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{7}}{x^2 + x - 20};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 3x}{4x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-7}{3x+4} \right)^{5x+4};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6x+2}{8x-5} \right)^{7x+1};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^x}{3x}.$

Завдання 7.30.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^3 - 2x - 7}{2x^2 - 11x + 9};$

2. $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 - 49}{x^2 + 2x - 35};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 49x + 3}{7x^2 + x + 15};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 7x^2 + 3x}{3x^3 - x^2 - 6};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 1}{2x^5 - x^4 - 3x^2};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + \sqrt[6]{x^4 + 3}}{\sqrt[5]{x^3 + 2x} + \sqrt[9]{x^8 + 4}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - 3}{\sqrt{x-4} - 2};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\arcsin x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin 5x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+6}{2x-7} \right)^{3x+1};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-2}{10x+0} \right)^{x+3};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{9x}}{11x}.$

Тема 8 «ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ»

Приклади розв'язання типового варіанту

Знайти похідні:

$$1. y = \frac{5x^7 - 3x\sqrt{x}}{x^3} + 2x^5 + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - 27.$$

Розв'язання. Функція проста, степенева, представлена у вигляді алгебраїчної суми (6.5), але перед диференціюванням її треба спростити, скориставшись властивостями степенів. Отже перепишемо функцію:

$$y = 5x^4 - 3x^{-\frac{3}{2}} + 2x^5 + 4x^{-\frac{1}{3}} - 27.$$

Знайдемо її похідну:

$$\begin{aligned} y' &= 5 \cdot 4x^3 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}} + 2 \cdot 5x^4 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}} - 0 = \\ &= 20x^3 + \frac{9}{2\sqrt{x^5}} + 10x^4 - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

$$2. y = (8x^3 + 6\sqrt{x}) \cdot \arcsin x.$$

Розв'язання. Функція проста, представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою (6.6):

$$u = 8x^3 + 6\sqrt{x}; \quad u' = 24x^2 + \frac{6}{2\sqrt{x}};$$

$$v = \arcsin x; \quad v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Підставимо у формулу (6.6):

$$y' = \left(24x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) \cdot \arcsin x + (8x^3 + 6\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Зауваження. Тим, хто легко впорався з технікою диференціювання, допоміжні обчислення можна опустити.

$$3. y = \log_7(x+3) + 5 \cos 4x - 4 \arctg 8x.$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді алгебраїчної суми, але звернемо вашу увагу, що кожний доданок – складна функція, тому диференціювати їх будемо за правилом (6.11), згідно таблиці похідних:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(x+7) \ln 7} (x+7)' + 5(-\cos 4x) \cdot (4x)' - 4 \frac{1}{1+(8x)^2} (8x)' = \\ &= \frac{1}{(x+7) \ln 7} - 20 \cos 4x - \frac{32}{1+64x^2}. \end{aligned}$$

$$4. y = \frac{5 \sin x + 6x^2}{3x^3 - 8x + 4}.$$

Розв'язання. Функція проста, представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (6.9):

$$u = 5 \sin x + 6x^2; \quad u' = 5 \cos x + 12x;$$

$$v = 3x^3 - 8x + 4; \quad v' = 9x^2 - 8.$$

Підставимо у формулу (6.9):

$$y' = \frac{(5 \cos x + 12x)(3x^3 - 8x + 4) - (5 \sin x + 6x^2)(9x^2 - 8)}{(3x^3 - 8x + 4)^2}.$$

$$5. y = \operatorname{ctg} 5x^7.$$

Розв'язання. Функція складна. Поступово диференціюємо її, спочатку котангенс, а потім його аргумент – степеневу функцію:

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 5x^7} \cdot (5x^7)' = -\frac{1}{\sin^2 5x^7} \cdot 35x^6.$$

$$6. y = \arccos^5 9x.$$

Розв'язання. Функція складна. Поступово диференціюємо її, спочатку степеневу функцію, потім її аргумент – арккосинус, і, наприкінці, аргумент арккосинусу:

$$\begin{aligned} y' &= 5 \arccos^4 9x \cdot (\arccos 9x)' = \\ &= 5 \arccos^4 9x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(9x)^2}} \right) \cdot (9x)' = \\ &= -5 \arccos^4 9x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-81x^2}} \cdot 9 = -\frac{45 \arccos^4 9x}{\sqrt{1-81x^2}}. \end{aligned}$$

$$7. y = 9 \operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}).$$

Розв'язання. Функція складна. Поступово диференціюємо її, спочатку показникову функцію, потім степеневу (ступінь тангенса), тригонометричну – тангенс, і його аргумент – корінь квадратний натурального логарифма, і, нарешті, сам логарифм:

$$\begin{aligned} y' &= 9 \operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}) \ln 9 \cdot (\operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}))' = \\ &= 9 \operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}) \ln 9 \cdot 3 \operatorname{tg}^2(5\sqrt{\ln x}) \cdot (\operatorname{tg}(5\sqrt{\ln x}))' = \\ &= 9 \operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}) \ln 9 \cdot 3 \operatorname{tg}^2(5\sqrt{\ln x}) \frac{1}{\cos^2(5\sqrt{\ln x})} (5\sqrt{\ln x})' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 9 \operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}) \ln 9 \cdot 3 \operatorname{tg}^2(5\sqrt{\ln x}) \frac{1}{\cos^2(5\sqrt{\ln x})} \cdot 5 \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot (\ln x)' = \\
&= \frac{15 \cdot 9 \operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}) \ln 9 \cdot \operatorname{tg}^2(5\sqrt{\ln x})}{2x \cdot \sqrt{\ln x} \cdot \cos^2(5\sqrt{\ln x})}.
\end{aligned}$$

$$8. y = \sqrt[7]{e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} + 12x}.$$

Розв'язання. Функція складна. Знаходимо похідну степеневі функції, а потім – похідну кожного з доданків підкореневого виразу:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{7} \left(e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} + 12x \right)^{-\frac{6}{7}} \cdot \left(e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} + 12x \right)' = \\
&= \frac{1}{7} \frac{1}{\sqrt[7]{\left(e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} + 12x \right)^6}} \cdot \left(e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} \cdot (\operatorname{arccctg} 6x^4)' + 12 \right) = \\
&= \frac{1}{7} \frac{1}{\sqrt[7]{\left(e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} + 12x \right)^6}} \cdot \left(e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} \cdot \left(-\frac{1}{1+(6x^4)^2} \right) (6x^4)' + 12 \right) = \\
&= \frac{1}{7} \frac{1}{\sqrt[7]{\left(e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} + 12x \right)^6}} \cdot \left(12 - \frac{24x^3 \cdot e^{\operatorname{arccctg} 6x^4}}{1+36x^8} \right).
\end{aligned}$$

$$9. y = (3x^5 + 5x) \cdot \log_2(4x^2 - 6).$$

Розв'язання. Функція складна, представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою (6.6):

$$\begin{aligned}
u &= 3x^5 + 5x; & u' &= 15x^4 + 5; \\
v &= \log_2(4x^2 - 6); & v' &= \frac{1}{(4x^2 - 6) \ln 2} \cdot (4x^2 - 6)' = \frac{8x}{(4x^2 - 6) \ln 2}.
\end{aligned}$$

Підставимо у формулу (6.6):

$$y' = (15x^4 + 5) \cdot \log_2(4x^2 - 6) + (3x^5 + 5x) \cdot \frac{8x}{(4x^2 - 6) \ln 2}.$$

$$10. y = \frac{\operatorname{tg} 7x^2}{x^4 - 4x^3}.$$

Розв'язання. Функція складна, представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (6.9):

$$\begin{aligned}
u &= \operatorname{tg} 7x^2; & u' &= \frac{1}{\cos^2 7x^2} \cdot (7x^2)' = \frac{1}{\cos^2 7x^2} \cdot 14x; \\
v &= x^4 - 4x^3; & v' &= 4x^3 - 12x^2.
\end{aligned}$$

Підставимо у формулу (6.9):

$$y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 7x^2} \cdot 14x(x^4 - 4x^3) - \operatorname{tg} 7x^2 (4x^3 - 12x^2)}{(x^4 - 4x^3)^2} =$$

приведемо чисельник до загального знаменника, маємо

$$= \frac{14x(x^4 - 4x^3) - \operatorname{tg} 7x^2 (4x^3 - 12x^2) \cos^2 7x^2}{(x^4 - 4x^3)^2 \cos^2 7x^2}.$$

$$11. y = \ln(\sin 3x) \cdot e^{\sqrt{x^2+4}}.$$

Розв'язання. Функція складна, представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою (6.6):

$$u = \ln(\sin 3x);$$

$$v = e^{\sqrt{x^2+4}};$$

$$u' = \frac{1}{\sin 3x} (\sin 3x)' = \frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = 3 \operatorname{ctg} 3x;$$

$$v' = e^{\sqrt{x^2+4}} \cdot (\sqrt{x^2+4})' = e^{\sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} (x^2+4)' = \frac{2x \cdot e^{\sqrt{x^2+4}}}{2\sqrt{x^2+4}}.$$

Підставимо у формулу (6.6):

$$y' = 3 \operatorname{ctg} 3x \cdot e^{\sqrt{x^2+4}} + \ln(\sin 3x) \cdot \frac{x \cdot e^{\sqrt{x^2+4}}}{\sqrt{x^2+4}}.$$

$$12. y = 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \sqrt{9 + \frac{1}{x}}.$$

Розв'язання. Функція складна, представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою (6.6):

$$u = 5^{\operatorname{arctg} 3x};$$

$$v = \sqrt{9 + x^2};$$

$$u' = 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \ln 5 \cdot (\operatorname{arctg} 3x)' =$$

$$5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{1+(3x)^2} (3x)' =$$

$$= 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{3}{1+9x^2};$$

$$v' = \frac{1}{2\sqrt{9+x^2}} \cdot (9+x^2)' = \frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

Підставимо у формулу (6.6):

$$y' = 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{3}{1+9x^2} \cdot \sqrt{9+x^2} + 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

$$13. y = \frac{\ln(e^x+3)}{\sqrt{1+\cos 3x}}.$$

Розв'язання. Функція складна, представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (6.9):

$$u = \ln(e^x + 3);$$

$$v = \sqrt{1 + \cos 3x};$$

$$u' = \frac{1}{e^x + 3} \cdot (e^x + 3)' = \frac{1}{e^x + 3} \cdot e^x;$$

$$v' = \frac{1}{2\sqrt{1+\cos 3x}} \cdot (1 + \cos 3x)' = \frac{1}{2\sqrt{1+\cos 3x}} \cdot (-\sin 3x) \cdot (3x)' =$$

$$= -\frac{3 \sin 3x}{2\sqrt{1+\cos 3x}}$$

Підставимо у формулу (6.9):

$$y' = \frac{\frac{e^x}{e^x+3} \sqrt{1+\cos 3x} - \ln(e^x+3) \cdot \left(-\frac{3 \sin 3x}{2\sqrt{1+\cos 3x}}\right)}{1+\cos 3x} =$$

приведемо чисельник до загального знаменника, маємо

$$= \frac{2e^x(1+\cos 3x) + 3(e^x+3) \ln(e^x+3) \cdot \sin 3x}{2(e^x+3)\sqrt{(1+\cos 3x)^3}}.$$

$$14. y = \frac{\operatorname{arccctg} \sqrt{x^2-1}}{\operatorname{tg}^2(x-1)}.$$

Розв'язання. Функція складна, представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (6.9):

$$u = \operatorname{arccctg} \sqrt{x^2-1};$$

$$v = \operatorname{tg}^2(x-1);$$

$$u' = -\frac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2} \cdot (\sqrt{x^2-1})' = -\frac{1}{1+(x^2-1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot (x^2-1)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$v' = 2 \operatorname{tg}(x-1) \cdot (\operatorname{tg}(x-1))' = 2 \operatorname{tg}(x-1) \frac{1}{\cos^2(x-1)}.$$

$$(x-1)' =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg}(x-1)}{\cos^2(x-1)}$$

Підставимо у формулу (6.9):

$$y' = \frac{-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \operatorname{tg}^2(x-1) - \operatorname{arccctg} \sqrt{x^2-1} \cdot \frac{2 \operatorname{tg}(x-1)}{\cos^2(x-1)}}{\operatorname{tg}^4(x-1)} =$$

приведемо чисельник до загального знаменника, маємо

$$= -\frac{\sin^2(x-1) + 2 \operatorname{tg}(x-1) x \sqrt{x^2-1} \operatorname{arccctg} \sqrt{x^2-1}}{x \sqrt{x^2-1} \cos^2(x-1) \cdot \operatorname{tg}^4(x-1)}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

$$15. y = (tgx)^{\sin x}.$$

Розв'язання. Функція степенево-показникова, тому для її диференціювання треба або скористатися формулою (6.25), або прологарифмувати функцію та продиференціювати отриманий вираз. Ми вважаємо, що нема необхідності запам'ятовувати формулу (6.25), набагато легше кожного разу повторювати необхідну процедуру.

Логарифмуємо функцію:

$$\ln y = \ln(tgx)^{\sin x}.$$

За властивістю логарифмів, показник степені підлогарифмічного виразу – коефіцієнт перед логарифмом:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln(tgx).$$

Ліворуч обчислимо похідну логарифма (пам'ятаємо, що y функція x , тобто складна функція), а праворуч обчислимо похідну добутку:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \cos x \cdot \ln(tgx) + \sin x \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot y; \\ y' &= y \left(\cos x \cdot \ln(tgx) + \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right); \\ y' &= (tgx)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(tgx) + \frac{1}{\cos x} \right). \end{aligned}$$

$$16. y = (\arcsin \sqrt{x})^{\frac{5}{x^2}}.$$

Розв'язання. Функція степенево-показникова. Для її диференціювання скористаємося алгоритмом, який згадали при розв'язанні приклада 15:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln(\arcsin \sqrt{x})^{\frac{5}{x^2}}; \\ \ln y &= \frac{5}{x^2} \ln \arcsin \sqrt{x} = \frac{5 \ln \arcsin \sqrt{x}}{x^2}. \end{aligned}$$

Права частина набуває вигляду частинки, тому за формулою (6.9) маємо:

$$\frac{y'}{y} = 5 \frac{\frac{1}{\arcsin \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2 - \ln \arcsin \sqrt{x} \cdot 2x}{x^4} =$$

$$\begin{aligned}
&= 5 \frac{x(x-4\sqrt{x-x^2} \cdot \arcsin \sqrt{x} \cdot \ln \arcsin \sqrt{x})}{x^4} = \\
&= 5 \frac{x-4\sqrt{x-x^2} \cdot \arcsin \sqrt{x} \cdot \ln \arcsin \sqrt{x}}{x^3} \Big| \cdot y; \\
y' &= 5(\arcsin \sqrt{x})^{\frac{5}{x^2}} \cdot \frac{x-4\sqrt{x-x^2} \cdot \arcsin \sqrt{x} \cdot \ln \arcsin \sqrt{x}}{x^3}.
\end{aligned}$$

$$17. y = \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3} \cdot (x-8)^4}.$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді частки, знаменник дробі – у вигляді добутку. Отже диференціювання такої функції за формулами (6.6), (6.9) нерационально. Відомо, що для диференціювання функції, яка містить більш, ніж два множника, використовують метод логарифмічного диференціювання. Продиференціюємо функцію, скористаємося властивостями логарифмів, а потім знайдемо похідну:

$$\ln y = \ln \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3} \cdot (x-8)^4};$$

$$\ln y = \ln(3x+2)^6 - \ln(x+5)^{\frac{3}{7}} - \ln(x-8)^4;$$

$$\ln y = 6 \ln(3x+2) - \frac{3}{7} \ln(x+5) - 4 \ln(x-8);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{6 \cdot 3}{3x+2} - \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{x+5} - \frac{4}{x-8} \Big| \cdot y;$$

$$y' = \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3} \cdot (x-8)^4} \left[\frac{6}{3x+2} - \frac{3}{7(x+5)} - \frac{4}{x-8} \right].$$

За бажанням, даний вираз можна спростити:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3} \cdot (x-8)^4} \cdot \frac{42(x+5)(x-8) - 3(3x+2)(x-8) - 28(3x+2)(x+5)}{7(3x+2)(x+5)(x-8)} = \\
&= - \frac{(3x+2)^5(51x^2+536x+1912)}{7\sqrt[7]{(x+5)^{10}} \cdot (x-8)^5}.
\end{aligned}$$

$$18. y = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \operatorname{ctg}^3 5x.$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді добутку. Але при диференціюванні першого множника вже виникають проблеми, а саме: по-перше, знаходиться похідна від степеневі функції, по-друге, підкорений вираз – дріб, тому необхідно його диференціювати за формулою похідна від частки... Цієї

проблеми можна уникнути, якщо, як у попередньому прикладі, скористатися методом логарифмічного диференціювання.

$$\ln y = \ln \left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \operatorname{ctg}^3 5x \right);$$

$$\ln y = \ln \left(\frac{(x+1)^{\frac{1}{4}}}{(x-1)^{\frac{1}{4}}} \cdot \operatorname{ctg}^3 5x \right);$$

$$\ln y = \ln(x+1)^{\frac{1}{4}} - \ln(x-1)^{\frac{1}{4}} + \ln(\operatorname{ctg} 5x)^3;$$

$$\ln y = \frac{1}{4} \ln(x+1) - \frac{1}{4} \ln(x-1) + 3 \ln(\operatorname{ctg} 5x);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + 3 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} 5x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 5x} \right) \cdot 5 \Big| \cdot y;$$

$$y' = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \operatorname{ctg}^3 5x \left[\frac{x-1-x-1}{4(x-1)(x+1)} - \frac{15}{\frac{\cos 5x}{\sin 5x} \cdot \sin^2 5x} \right];$$

$$y' = -\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \operatorname{ctg}^3 5x \left[\frac{1}{2(x^2-1)} + \frac{30}{\sin 10x} \right].$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

$$19. y \cos x - x \sin y = 0.$$

Розв'язання. Нагадаємо, що при диференціюванні таких функцій ми зобов'язані пам'ятати, що y є функцією x , тому диференціювати її потрібно за правилами диференціювання складних функцій. Наша функція складається з двох доданків, кожний з яких має вигляд добутку, у відповідності з вже відомими правилами маємо:

$$y' \cos x + y(-\sin x) - 1 \cdot \sin y - x \cos y \cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо лінійне рівняння відносно шуканої похідної:

$$y'(\cos x - x \cos y) = \sin y + y \sin x.$$

Остаточно маємо:

$$y' = \frac{\sin y + y \sin x}{\cos x - x \cos y}.$$

$$20. \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Розв'язання. Продиференціюємо неявно задану функцію аналогічно попередньому прикладу:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+y^2)'}{x^2+y^2};$$

$$\frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2y \cdot y'}{x^2+y^2}.$$

Виконаємо необхідні перетворення:

$$\frac{y-xy'}{x^2+y^2} = \frac{x+yy'}{x^2+y^2};$$

$$y - xy' = x + yy';$$

$$y'(x+y) = y - x;$$

остаточно маємо

$$y' = \frac{y-x}{y+x}.$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$21. \begin{cases} x = 4t - 15 \\ y = 2t^3 \end{cases}.$$

Розв'язання. За формулою (6.26), для того, щоб знайти похідну функції, заданої параметрично, спочатку необхідно знайти похідні x та y за параметром t .

$$x'_t = 4; \quad y'_t = 6t.$$

За формулою (6.26) маємо:

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{6t}{4} = \frac{3t}{2}.$$

$$22. \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t) \\ y = 2(\sin t - t \cos t) \end{cases}.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою (6.26):

$$x'_t = 2(-\sin t + \sin t + t \cos t) = 2t \cos t;$$

$$y'_t = 2(\cos t - \cos t + t \sin t) = 2t \sin t;$$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t \sin t}{2t \cos t} = \operatorname{tg} t.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 8

Завдання 8.1.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{7x^3 - 5\sqrt{x}}{x^2} + 3x^6 - \frac{7}{x} + 18;$

2. $y = (5x^7 + 13x) \cdot \log_5 x;$

3. $y = 2^x + \sin 5x + 4 \operatorname{tg} 3x;$

4. $y = \frac{2 \cos x - 12}{2x^2 + 7x - 5};$

5. $y = 2^{\log_4 \operatorname{tg} 3x};$

6. $y = \sin^7 4x;$

7. $y = \cos 9x^{10};$

8. $y = \sqrt[6]{\operatorname{tg}^4 7x + 18};$

9. $y = (2x^8 + 14) \cdot \operatorname{ctg}^3 5x;$

10. $y = \frac{12 \arcsin 4x^5}{x^3 - 4x};$

11. $y = 5^{\ln^3 \operatorname{ctg} x} \cdot \cos \sqrt{x};$

12. $y = \log_4(\sin 5x) \cdot e^{\sqrt{x^5}};$

13. $y = \frac{\sqrt[4]{2x^5 + 3x^4 - 12x}}{\ln(\cos 7x)};$

14. $y = \frac{\arctg^2(e^x - 2)}{(2 \ln x + 5)^3}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\cos 9x)^{\log_3 x};$

16. $y = (\operatorname{tg} 7x^4)^{e^{x^3} + 2};$

17. $y = \frac{(x-7)^9 \cdot \sqrt[8]{(x+5)^3}}{(2x-9)^4};$

18. $y = \sqrt[5]{\frac{x+4}{x-4}} \log_5(\sin 3x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\operatorname{ctg} y^2 = 5x^2 - 3y;$

20. $\ln(5x + 3y) - \frac{x^5 y}{y^3 - 4} = 0$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 3t - 8 \\ y = 6t - t^2 \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = (t^2 - 9) \cos 3t \\ y = (t^2 + 9) \sin 3t \end{cases}.$

Завдання 8.2.

Знайти похідні:

1. $y = 4\sqrt[5]{x^3} - \frac{6x+2\sqrt{x^7}}{x^3} + 2x - 3;$

2. $y = (2x^4 - 5x) \cdot 3^x;$

3. $y = 7ctg4x - e^{6x} - \ln 3x;$

4. $y = \frac{5\sin x + 3x}{4x^5 - 3x^3 + 8};$

5. $y = \log_7(\cos x^3);$

6. $y = \arcsin^8 5x;$

7. $y = tg 6x^9;$

8. $y = \sqrt[5]{e^{\sin 6x} - 12x};$

9. $y = (2x^3 - 6x) \cdot \cos^4 7x;$

10. $y = \frac{9\operatorname{arccctg} 3x^6}{x^6 - 7x};$

11. $y = 8\sqrt[8]{\log_3 4x} \cdot ctg^2 6x;$

12. $y = \cos 7x^6 \cdot tg(\sqrt[3]{x^5});$

13. $y = \frac{\sqrt[3]{7x^4 - 2x^2 - 21}}{\ln(\sin 13x)};$

14. $y = \frac{\operatorname{arccos}^5(4^x - 9)}{(3\ln 7x - 9)^3}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\sin 8x)^{\cos x};$

16. $y = (\operatorname{arccctg} 2x^5)^{\ln^8 7x};$

17. $y = \frac{(x+6)^8 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^7}}{(4x-7)^5};$

18. $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} tg(e^{3x} - 5).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y^2 = 8xy;$

20. $x \cdot \sin y^5 - 2y^3 tg x = 0$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = 6t^2 \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = e^{5t} \sin 4t \\ y = e^{5t} \cos 4t \end{cases}.$

Завдання 8.3.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{9}{\sqrt[6]{x^5}} + 5x^2 + 9 - \frac{3x\sqrt{x-x^3}}{\sqrt[3]{x}};$ 2. $y = (4x^3 - 5x) \cdot \sin x;$

3. $y = 2\arccos 5x + 4\log_5 x - 9^{2x};$ 4. $y = \frac{4tgx+7}{3x^5-7x^4+1};$

5. $y = e^{\arccos 5x};$

6. $y = \cos^5 9x;$

7. $y = ctg 8x^3;$

8. $y = \sqrt[4]{5\ln(3x-7) + 8x^2};$

9. $y = (4x^5 + 21) \cdot \sin^6 2x;$

10. $y = \frac{7\arctg^9(2x-3)}{x^5+12x^4};$

11. $y = 4^{\cos^3(2x-7)} \cdot \sin \frac{3}{x};$

12. $y = tg(\arcsin 2x) 2^{\sqrt{x^4}};$

13. $y = \frac{\sqrt[8]{4x^3+3x^2-9x}}{\ln(tg 5x)};$

14. $y = \frac{\arcsin^5(3^x-4)}{(5\cos x-2)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (tg 5x)^{\arcsin x};$

16. $y = (\sin 2x^5)^{\ln^4(2x+5)};$

17. $y = \frac{(2x-3)^6}{(x-9)^5 \cdot \sqrt[6]{(x+4)^7}};$

18. $y = \sqrt[7]{\frac{x+8}{x-8}} \sin(x^2 - 3x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\sin(2x^5 - y^2) = 2y \cdot \cos x^2;$ 20. $y^2 \cos x = 4 \sin 3x.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 7\cos t, \\ y = 9\sin t, \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = t \cdot \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

Завдання 8.4.

Знайти похідні:

1. $y = 12 + 4\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[7]{x^2}} + \frac{3\sqrt[5]{x^4+4x}}{x^4}$; 2. $y = (4x^8 + 5x^3) \cdot \cos x$;

3. $y = 4\cos 7x - 2\log_7 2x - e^{tg^4 x}$; 4. $y = \frac{6ctgx-5}{4x^2+3x^8-11}$;

5. $y = \log_6(e^x - 3x^2)$; 6. $y = tg^4 7x$;

7. $y = \arcsin 5x^4$; 8. $y = \sqrt[8]{\cos^3 9x - 7x}$;

9. $y = (3x^5 - 7x) \cdot ctg^4 7x$; 10. $y = \frac{7\sin 9x^2}{2x^3+5x}$;

11. $y = 3^{tg(5x^4-7x)} \cdot \ln(\sin 8x^3)$; 12. $y = \cos(2^x - 1)tg^5 \sqrt{x^2}$;

13. $y = \frac{\sqrt[7]{4x^9-2x^5-31}}{\ln(ctg 6x)}$; 14. $y = \frac{tg^5(4^x+13)}{(3\arcsin x-2)^4}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (ctg 6x)^{\arccos x}$; 16. $y = (\cos 6x^3)^{\sqrt{tg^5 x}}$;

17. $y = \frac{(3x+1)^4 \cdot \sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x-5)^3}$; 18. $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} \cos \sqrt{x-6}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\cos^3 y = 3x^4 \cdot \ln y$; 20. $3^x + 3^y = 3^{x+y}$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 4t - 9\sin t \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = e^t \cos^2 t \\ y = e^t \sin^2 t \end{cases}$.

Завдання 8.5.

Знайти похідні:

1. $y = 2x + \frac{6x^3\sqrt{x}-2x^8}{x^9} + \frac{4}{x^5} + 9;$

2. $y = (4x^5 - 2x^{11}) \cdot \operatorname{tg} x;$

3. $y = 9\operatorname{tg} 5x + 4e^{3x} + \operatorname{arcc} \operatorname{tg} 7x;$

4. $y = \frac{7\ln x + 3}{2x^6 - 5x^4 - x};$

5. $y = \ln(\operatorname{arcc} \operatorname{tg} 6x - 15);$

6. $y = \operatorname{ctg}^2 8x;$

7. $y = \operatorname{arccos} 3x^7;$

8. $y = \sqrt[3]{\log_2^6 3x - 9x^4};$

9. $y = (5x^8 + 17x) \cdot \cos^7 2x;$

10. $y = \frac{4\operatorname{tg}^{53} x}{x^7 - 8x^6};$

11. $y = 9\cos^5 \sqrt{x^4} \cdot \operatorname{tg}(7x^8 - 3);$

12. $y = \log_3(\operatorname{tg} 2x) 5^{\cos x^2};$

13. $y = \frac{\sqrt[8]{4x^5 - 12x^3 - 5x}}{\ln(\operatorname{arcsin} 4x)};$

14. $y = \frac{\operatorname{ctg}^6(2^x - 9)}{(4\operatorname{arccos} x + 3)^7}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{arcsin} 2x)^{\sqrt{x}};$

16. $y = (\operatorname{tg} 5x^2)^{3x^2 - 7};$

17. $y = \frac{(7x-3)^4}{(x-5)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+4)^7}};$

18. $y = \sqrt[5]{\frac{x+7}{x-7}} \ln(\operatorname{tg} 2x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $2y \ln y = x;$

20. $\operatorname{tg}(4x^7 - 3y^3) = \frac{x^2 - 6}{y^5}.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t \cdot 2^t \\ y = t^2 + 2t \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}} \\ y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{t}} \end{cases}.$

Завдання 8.6.

Знайти похідні:

1. $y = 7x^3 - 8 + \frac{8\sqrt{x^5+x^3}}{2x^2} + \frac{3}{x^2};$ 2. $y = (9x^7 + 22) \cdot ctgx;$

3. $y = (2x + 1)^3 - \cos 5x - 2 \ln 6x;$ 4. $y = \frac{9 \log_3 x - 6}{5x^4 - 2x^2 - 7};$

5. $y = \sin(2^x - 14x^5);$ 6. $y = \arcsin^4 5x;$

7. $y = \ln 8x^7;$ 8. $y = \sqrt[5]{tg^4 12x + 4x^9};$

9. $y = (9x^3 - 35x^2) \cdot tg^4 8x;$ 10. $y = \frac{32 \cdot e^{\cos 2x^5}}{x^6 + 3x^2};$

11. $y = 7^{\log_3(tg 2x)} \cdot \arccos \sqrt[7]{x^{10}};$ 12. $y = \ln(\arctg 5x) 2^{\cos \sqrt{x}};$

13. $y = \frac{\sqrt[9]{5x^2 + 3x - 37}}{\ln(\arccos 7x)};$ 14. $y = \frac{\arcsin^5(e^x + 4)}{(2 \ln x - 5)^7}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\arctg 5x)^{\ln x};$ 16. $y = (ctg 4x^7)^{\arcsin^5 4x};$

17. $y = \frac{(x+7)^8 \cdot \sqrt[9]{(x+5)^2}}{(4x-5)^4};$ 18. $y = \sqrt[8]{\frac{x-3}{x+3}} tg(\ln 5x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $2x^5 \cdot \ln y = 7x^8 + 3 \cos y;$ 20. $x - y = y \cdot \arcsin x.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t g t \\ y = \sin 2t + \cos 2t \end{cases};$ 22. $\begin{cases} x = t(1 - \sin t) \\ y = t \cdot \cos t \end{cases}.$

Завдання 8.7.

Знайти похідні:

$$1. y = 16 - \frac{7}{\sqrt[5]{x^4}} + 9x^4 + \frac{3\sqrt[3]{x} + 7x^2}{x^5}; \quad 2. y = (3x^3 - \sqrt{x}) \arcsin x;$$

$$3. y = 4^{x+3} - 2 \arctg 8x - 3 \log_9 5x; \quad 4. y = \frac{2e^x - 17}{5x^3 + 4x^2 + 12x};$$

$$5. y = \cos(\log_7 3x); \quad 6. y = \arccos^9 2x;$$

$$7. y = \arctg 9x^6; \quad 8. y = \sqrt[4]{e^{\ln 83x} - 12x^5};$$

$$9. y = (5x^8 + 61x) \cdot \ln^3 4x; \quad 10. y = \frac{4 \ln(\cos 2x)}{x^6 - 4x^5};$$

$$11. y = 8^{\sin^4(\ln x)} \cdot \log_5^3(4x - \sqrt{x}); \quad 12. y = \tg 7x^9 \cdot \sqrt[3]{\arcsin 6x};$$

$$13. y = \frac{\sqrt[3]{8x^7 + 6x^5 + 4x^2}}{\ln(\arctg 9x)}; \quad 14. y = \frac{\arccos^7(5^x - 9)}{(4 \log_6 x - 5)^8}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

$$15. y = (\arctg 3x)^{\sqrt[3]{x}}; \quad 16. y = (\arcsin 2x^9)^{\log_5^8 x};$$

$$17. y = \frac{(11x+1)^2}{(x-4)^9 \cdot \sqrt[7]{(x-3)^2}}; \quad 18. y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}} \log_7(\cos 4x).$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

$$19. \ln \frac{x^6}{y} = 4y \cdot \arcsin x; \quad 20. y = \tg(2x + 3y).$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$21. \begin{cases} x = t^3 - 3t; \\ y = t^3 + 3t; \end{cases} \quad 22. \begin{cases} x = 2 \ln(ctgt) + 1; \\ y = tgt + ctgt \end{cases}.$$

Завдання 8.8.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{5x^4 + 6\sqrt[4]{x^3}}{x^3} + 7x^3 + \frac{2}{x^6} - 13;$ 2.

$y = (2x^3 - \sqrt[8]{x}) \arccos x;$

3. $y = 6 \operatorname{ctg} 5x - 3 \log_4 3x + 5e^{3x};$ 4. $y = \frac{13 \cdot 7^x - 5}{6x^3 - 8x^2 + 4x};$

5. $y = \operatorname{tg}(2x^5 + 5^x);$ 6. $y = \operatorname{arctg}^6 4x;$

7. $y = \log^8 6x;$ 8. $y = \sqrt[7]{\cos^3 5x + 4x};$

9. $y = (12x^6 - 7x^4) \cdot e^{5 \operatorname{ctg} x^2};$ 10. $y = \frac{5 \sin 2x^6}{3x^2 + 5x};$

11. $y = 11^{\cos^2 \ln x} \cdot \operatorname{tg} \frac{7}{x};$ 12. $y = \operatorname{ctg}(\log_2 x) \cdot 2^{\sqrt{x^7}};$

13. $y = \frac{\sqrt[4]{7x^5 - 3x^3 - 15}}{\ln(\operatorname{arctg} 4x)};$ 14. $y = \frac{\operatorname{arctg}^4(7^x + 3)}{(5 \cos x - 1)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\sin 8x)^{\operatorname{arctg} x};$ 16. $y = (\operatorname{arctg} 4x^5)^{2x^7 - 9};$

17. $y = \frac{(x+7)^8 \cdot \sqrt[3]{(x-4)^7}}{(5x-3)^6};$ 18. $y = \sqrt[4]{\frac{x-6}{x+6}} \ln(\operatorname{ctg} 7x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $e^{x^3+6y} = 2x \cdot \operatorname{arccotg} y;$ 20. $\cos(xy) = x + y.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 4t + e^t; \\ y = 4t \cdot e^t; \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x = t \cdot \cos t - 2 \sin t \\ y = t \cdot \sin t + 2 \cos t \end{cases}$

Завдання 8.9.

Знайти похідні:

1.
$$y = 5x^2\sqrt{x} - \frac{2\sqrt[3]{x^4-5x}}{x^3} + 8x^4 - 9;$$

2.
$$y = (8x^6 + 5x^3)\arcsin x;$$

3.
$$y = \operatorname{arctg} 2x + 3^{3x} - \ln(x^2 + x);$$

4.
$$y = \frac{7\sin x - 10}{2x^2 + 4x - 15};$$

5.
$$y = \operatorname{ctg}(\sin 4x - 7);$$

6.
$$y = \operatorname{arctg} 8^5 x;$$

7.
$$y = e^{5x^6 - 8x^2 + 3};$$

8.
$$y = \sqrt[3]{tg^2 5x + 8x^9};$$

9.
$$y = (4x^7 + 13x^5) \cdot \arcsin^4 6x;$$

10.
$$y = \frac{8\cos 2x^3}{x^5 - 3x^2};$$

11.
$$y = 6^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot \log_7^4(e^{2x} + 4x);$$

12.
$$y = \arcsin(\ln x)e^{\sqrt{tg x^3}};$$

13.
$$y = \frac{\sqrt[5]{12x^3 - 2x^2 - 5x}}{\log_3(\cos 5x)};$$

14.
$$y = \frac{\operatorname{arctg}^9(e^x + 4)}{(5\sin x - 7)^3}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15.
$$y = (\cos 5x)^{\operatorname{arctg} x};$$

16.
$$y = (\operatorname{arctg} 6x^3)^{\ln^8 x};$$

17.
$$y = \frac{(9x-2)^7}{(x-7)^4 \cdot \sqrt[5]{(x+1)^3}};$$

18.
$$y = \sqrt[5]{\frac{x-8}{x+8}} \operatorname{tg}(x^2 + 6x).$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19.
$$y^2 \cdot \ln_5 x = 7x^3 - 5\operatorname{tg} y;$$

20.
$$y = x + \operatorname{arctg}(x + y).$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21.
$$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 \sin t \end{cases};$$

22.
$$\begin{cases} x = \sin t(2 + \cos^2 t) \\ y = \cos^3 t \end{cases}.$$

Завдання 8.10.

Знайти похідні:

$$1. y = 15 - 6\sqrt[7]{x^4} + \frac{2}{x^6} + \frac{7x^5\sqrt{x}+3x^2}{x^4}; \quad 2. y = (3x^2 - x) \cdot \arccos x;$$

$$3. y = \log_3(2x - 7) + 5\sin 4x + e^{2x}; \quad 4. y = \frac{3\cos x + 8}{12x^9 - 7x^5 - x^2};$$

$$5. y = \arcsin(x^2 - 3\sqrt{x}); \quad 6. y = \ln^7 6x;$$

$$7. y = 3^{9x^4 - 8x^5}; \quad 8. y = \sqrt[10]{\sin^5 2x - 5x^2};$$

$$9. y = (10x^7 - 3x^5) \cdot \arccos^3 9x; \quad 10. y = \frac{4tg 7x^3}{x^6 - 4x^5};$$

$$11. y = 2^{\sin^4 \ln x} \cdot \sqrt{tg(3x + 2)}; \quad 12. y = \log_7(\cos x) \sqrt[3]{5^{ctg x}};$$

$$13. y = \frac{\sqrt[6]{7x^9 - 10x^3 - 52}}{\log_4(\sin 3x)}; \quad 14. y = \frac{\sin^8(e^x - 6)}{(6\log_3 x + 5)^9}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

$$15. y = (tg 4x)^{\arcsin x} \cdot (\ln 5x^9)^{\cos^4 3x}; \quad 16. y =$$

$$17. y = \frac{(x-2)^8 \cdot \sqrt[7]{(x+9)^4}}{(7x-4)^5}; \quad 18. y = \sqrt[7]{\frac{x+3}{x-3}} \cdot ctg \frac{1}{x}.$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

$$19. x^7 \cdot ctg y = 8\ln^2 y - 7x; \quad 20. x \cdot \sin y - y \cdot \cos x = xy.$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$21. \begin{cases} x = 2tg t \\ y = \sin^2 t + \sin 2t \end{cases}; \quad 22. \begin{cases} x = e^{3t} \cos^3 t \\ y = e^{3t} \sin^3 t \end{cases}$$

Завдання 8.11.

Знайти похідні:

1. $y = 7x^3 + \frac{12x^5 - x^2\sqrt{x}}{x^5} - \frac{8}{\sqrt[3]{x^5}} - 10$; 2. $y = (4\sqrt[5]{x^7} - 9)\arctg x$;

3. $y = 6e^{7x} - 4\operatorname{ctg} 3x - 5\arcsin 2x$; 4. $y = \frac{5\operatorname{tg} x - 2}{4x^5 + 17x^2 + 2x}$;

5. $y = \arccos \sqrt{3x^2 - 5}$;

6. $y = \log_5^8 9x$;

7. $y = \sin 5x^2$;

8.

$y = \sqrt[6]{\cos^3 2x + 6x^4}$;

9. $y = (21x^4 + 7x) \cdot 7^{\ln(3x-4)}$;

10. $y = \frac{3\operatorname{ctg} 8x^5}{x^{10} + 3x^6}$;

11. $y = 6\operatorname{tg}^{5(2x-8)} \cdot \log_3^6(\arcsin 4x)$;
 $\operatorname{tg}^7 \sqrt{x^5}$;

12. $y = \cos(2^x) \cdot$

13. $y = \frac{\sqrt[7]{8x^5 + 2x^2 - 9x}}{\log_5(\operatorname{tg} 3x)}$;

14. $y = \frac{\cos^7(7^x - 2)}{(4\arcsin x - 6)^2}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{ctg} 10x)^{\arccos x}$;

16. $y = (\log_9 2x^7)^{\arcsin^6 2x}$;

17. $y = \frac{(8x-7)^{10}}{(x+3)^4 \cdot \sqrt[5]{(x+2)^7}}$;

18. $y = \sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}} \log_9(\operatorname{ctg} 4x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\arcsin x^8 = 3y \cdot e^{x^2}$;

20. $x^3 + y^3 = 12xy$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t + 2\operatorname{tg} t \\ y = \arcsin t \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = \sin t - \frac{t^2}{2} \cos t \\ y = \cos t + \frac{t^2}{2} \sin t \end{cases}$.

Завдання 8.12.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{6}{\sqrt[7]{x^8}} + 4 + 13x^4 + \frac{8x^9 - 5x^3\sqrt[3]{x}}{x^2}$; 2. $y = (11x^3 + 2\sqrt[7]{x}) \cdot e^x$;

3. $y = 6^{2x-3} + 2\operatorname{arccctg} 5x - \log_7 4x$; 4. $y = \frac{7\operatorname{arcsin} x + 15}{x^8 - 2x^5 + 3x^3}$;

5. $y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} 9x - 5x}$; 6. $y = e^{\cos^2 x}$;

7. $y = \operatorname{tg} 3x^{13}$; 8.

$y = \sqrt[8]{\operatorname{arcsin}^4 5x + 9x^3}$;

9. $y = (3x^{11} - 9x^4) \cdot \operatorname{arccos}^3 12x$; 10. $y = \frac{9\operatorname{ctg} 5x^4}{x^2 - 2x}$;

11. $y = 9^{\ln^7 \cos x} \cdot \operatorname{arccos} \sqrt{x}$; 12. $y = \sin(\operatorname{ctg} 5x) \ln^9 \sqrt[3]{x}$;

13. $y = \frac{\sqrt[8]{21x^4 - 3x^3 + 5x^2}}{\log_2(\operatorname{ctg} 10x)}$; 14. $y = \frac{\operatorname{tg}^4(4^x - 5)}{(8\operatorname{arccos} x - 4)^9}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{arcsin} 5x)^{\log_7 x}$; 16. $y = (\sin 8x^2)^{\sqrt[3]{x^2 - 6x + 5}}$;

17. $y = \frac{(x-6)^4 \cdot \sqrt[3]{(x-2)^{10}}}{(4x-1)^5}$; 18. $y = \sqrt[7]{\frac{x+8}{x-8}} \cdot e^{\operatorname{arctg} 3x}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\ln(x^5 - 6y) = 4y^3 \cdot \operatorname{tg} x$; 20. $y = 9 + x \cdot e^y$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$; 22. $\begin{cases} x = \frac{6t}{1+t^3} \\ y = \frac{6t^2}{1+t^3} \end{cases}$.

Завдання 8.13.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{\sqrt[7]{x^9+5x^4}}{x^3} + 18x^3 - 7 + \frac{6}{x^5};$
2. $y = (6\sqrt[3]{x^5} - 4x^9) \cdot 3^x;$
3. $y = 5\arctg 2x + \ln(5x - 4) + 7^{8x};$
4. $y = \frac{4\arccos x - 13}{6x^2 + 3x^9 - 17x};$
5. $y = \arccos(5^x + x^5);$
6. $y = 5^{x^3 - x + 12};$
7. $y = \cos 6x^7;$
8. $y = \sqrt[11]{\arccos^2 8x + 5x};$
9. $y = (2x^5 - 9x^7) \cdot \arctg^4 2x;$
10. $y = \frac{7\ln(2x^5 - 4x^2)}{x^7 - 12x};$
11. $y = 8^{\sin^6(e^x - 5)} \cdot \arctg \frac{7}{x};$
12. $y = \ctg(e^{x^2}) \arcsin \sqrt[3]{x};$
13. $y = \frac{\sqrt[9]{5x^7 + 2x^5 - 3x^4}}{\log_3(\arccos 4x)};$
14. $y = \frac{\ctg^5(6^x - 9)}{(9\ln x - 8)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\arccos 6x)^{\ln x};$
16. $y = (\cos 5x^3)^{\arccos 6^{9x}};$
17. $y = \frac{(3x-7)^2}{(x-4)^9 \cdot \sqrt[6]{(x+1)^7}};$
18. $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}} \tg(\ln 5x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x^2 + 2xy - y^2 = 4x;$
20. $e^{\frac{x}{y}} = \sin(4x^7 - 2y^3).$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 5\cos t; \\ y = \sin 5t; \end{cases}$
22. $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{5}{2t^2} - \frac{5}{t} \end{cases}.$

Завдання 8.14.

Знайти похідні:

1. $y = 9\sqrt[3]{x^5} + \frac{2x^7 - x^5\sqrt{x}}{x^3} + \frac{16}{x^4} - 9;$ 2. $y = (\sqrt[6]{x^5} + 14x^2) \cdot \ln x;$

3. $y = \log_2(x^3 + 1) - e^{6x} + 5\operatorname{tg}4x;$ 4. $y = \frac{2\operatorname{arctg}x - 6}{5x^8 - 6x^4 - 3};$

5. $y = e^{\cos 4x - 2x^3};$

6. $y = \sin^2 11x;$

7. $y = \operatorname{ctg} 9x^{11};$

8. $y = \sqrt[5]{\operatorname{arctg}^2 9x - 7x^4};$

9. $y = (17x^3 + 5x^2) \cdot \operatorname{arctg}^3 5x;$

10. $y = \frac{6\log_9(5x^4 - 8)}{x^{11} + 3x^2};$

11. $y = 3^{\cos^3(5x^4 - 7x)} \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x};$

12. $y = \log_9(5x^7) \operatorname{ctg}^6 3x;$

13. $y = \frac{\sqrt[7]{4x^6 - 3x^7 - 5x}}{\log_5(\operatorname{arcsin} 6x)};$

14. $y = \frac{\operatorname{arcsin}^2(5^x - 1)}{(11\log_6 x + 5)^7}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{arctg} 6x)^{\sqrt{x}};$

16. $y = (\operatorname{tg} 8x^3)^{4x^2 - 7};$

17. $y = \frac{(x+3)^8 \cdot \sqrt[4]{(x+2)^3}}{(9x-2)^6};$

18. $y = \sqrt[8]{\frac{x-3}{x+3}} \log_7(\sin 5x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;$

20. $x \cdot \operatorname{arctg} y^2 = x^8 - y^5.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 3t^4 + 4t^3; \\ y = t^2 - 2t \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = \frac{1 + \ln t}{t^2} \\ y = \frac{5 + 2 \ln t}{t} \end{cases}$

Завдання 8.15.

Знайти похідні:

1. $y = 5x^{27}\sqrt{x} - 4x^3 + \frac{3x^7 - 7\sqrt[5]{x^2}}{x^2} + 3$; 2. $y = (12x^5 + \sqrt[3]{x})\log_8 x$;

3. $y = 9\arccos 4x + 8e^{5x} - 4ctg 3x$; 4. $y = \frac{3\arccotgx + 18}{4x^9 + 4x^6 + 11x}$;

5. $y = 2^{tg(x^5 - 8x)}$;

6. $y = \cos^6 3x$;

7. $y = \arcsin 5x^8$;
 $\sqrt[7]{\arccotg^8 5x - 4e^x}$;

8. $y =$

9. $y = (8x^2 - 15x) \cdot \sin^4 5x$;

10. $y = \frac{8\arccos 5x^4}{x^8 - 3x^5}$;

11. $y = 4^{\arctg 4x^8} \cdot \ln(\cos 7x^3)$;
 $\log_2 tgx$;

12. $y = \arcsin \sqrt{x}$.

13. $y = \frac{\sqrt[6]{8x^2 - 3x^4 - 7x}}{\log_5(\arctg 9x)}$;

14. $y = \frac{\arccos^9(3^x + 2)}{(5tgx - 4)^3}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\ln 5x)^{\frac{1}{x}}$;

16. $y = (ctg 6x^5)^{\arcsin^4 3x}$;

17. $y = \frac{(5x-7)^3}{(x-1)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^8}}$;

18. $y = \sqrt[9]{\frac{x+5}{x-5}} \arcsin \sqrt{x}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x \cdot y - \ln y = 1$;
 \arctgy .

20. $(x^2 - y) \cdot 2^x =$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = \cos^2 t; \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t} \\ y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$.

Завдання 8.16.

Знайти похідні:

1. $y = 11 + 8x^7 - \frac{9}{x^5} + \frac{2x^6 - x^4\sqrt{x}}{x^7};$ 2. $y = (4^{\sqrt[9]{x^{13}}} - 25)\sin x;$

3. $y = 5\log_7 6x - 4e^{7x} - 2\arctg 3x;$ 4. $y = \frac{7e^x - 3}{2x^2 - 5x^5 - 7x};$

5. $y = \ln(3\ctg 6x - 8x);$

6. $y = \tg^5 4x;$

7. $y = \arccos 6x^{10};$

8. $y = \sqrt[3]{5\sin^3 x - 12x^3};$

9. $y = (11x^6 + 5x^4) \cdot \cos^7 3x;$

10. $y = \frac{7\arctg 3x^9}{x^5 + 4x};$

11. $y = 2^{\cos^8(\log_4 x)} \cdot \arctg \sqrt{x};$
 $\log_9(\tg 7x)e^{\sqrt{\cos 2x}};$

12. $y =$

13. $y = \frac{\sqrt[5]{7x^{10} - 9x + 2x^5}}{\log_7(\arctg 6x)};$

14. $y = \frac{\arctg^7(4^x + 2)}{(7\sin x + 2)^5}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\log_7 3x)^{\sqrt[3]{x}};$

16. $y = (\arcsin 7x^2)^{\ln^{14} x};$

17. $y = \frac{(x+5)^9 \cdot \sqrt[6]{(x+2)^5}}{(8x-2)^3};$

18. $y = \sqrt[7]{\frac{x-3}{x+3}} \arccos \sqrt[3]{x}.$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\ctg x^8 = 4x^7 + 3xy^3;$

20. $\cos(xy) = 3x^4 + 6y^3.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = (t^2 + 3)e^t \\ y = \frac{e^t}{t^2 - 4} \end{cases}.$

Завдання 8.17.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{3x^7 - 4x^3\sqrt{x}}{x^5} + 9x^4 - \frac{2}{x^3} - 24;$ 2. $y = (5x^2 + 6\sqrt[5]{x^4})\cos x;$

3. $y = 2 \cdot 5^{3x} - \operatorname{ctg} 7x - 9\arccos 4x;$ 4. $y = \frac{4 \cdot 5^x - 3}{12x^3 + 7x^2 + 4x};$

5. $y = \log_9(5\operatorname{ctg} 4x - 9);$ 6. $y = \operatorname{ctg}^7 4x;$

7. $y = \arcsin 2x^6;$ 8. $y = \sqrt[9]{4\arccos x^4 - 21x};$

9. $y = (9x^8 - 13x^4) \cdot \operatorname{tg}^7 9x;$ 10. $y = \frac{10\operatorname{arccctg} 7x^2}{x^9 - 3x^5};$

11. $y = 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \operatorname{arctg}(5x - 7);$ 12. $y = \operatorname{arccose}^{x^5} \cdot \operatorname{tg}^5 \sqrt[5]{4x};$

13. $y = \frac{\sqrt[4]{3x^3 - 8x^2 - 6x}}{\ln(e^{7x} - 3)};$ 14. $y = \frac{\operatorname{arccctg}^5(6^x - 7)}{(4\cos x + 13)^2}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\sin 2x)^{\operatorname{arctg} x};$ 16. $y = (\arccos 9x^5)^{\sqrt[3]{\ln^5 x}};$

17. $y = \frac{(5x-7)^6}{(x-3)^2 \cdot \sqrt[4]{(x+5)^5}};$ 18. $y = \sqrt[4]{\frac{x-5}{x+5}} \log_3(\cos 9x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y^4 \operatorname{tg} x = 7x + 2y^3;$ 20. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3xy.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x = (t^2 + 5)e^t \\ y = (2t - 4)e^t \end{cases}$

Завдання 8.18.

Знайти похідні:

1. $y = 8^9 \sqrt{x^8} + \frac{3^6 \sqrt{x^5+4x}}{x^4} - \frac{7}{x} + 15;$ 2. $y = (3^3 \sqrt{x^2} - 4x^5) \cdot \operatorname{tg} x;$

3. $y = 11^{4x} + \operatorname{tg} 3x + 2 \log_6(3x + 5);$ 4. $y = \frac{2 \ln x + 9}{x^{10} - 7x^8 + 3x^4};$

5. $y = \cos(3 \ln x - 12);$

6. $y = \arcsin^3 4x;$

7. $y = e^{\operatorname{tg} x^2};$

8. $y = \sqrt[12]{\operatorname{ctg}^5 8x + 4x^7};$

9. $y = (15x^6 - 3x^4) \cdot \operatorname{ctg}^2 7x;$

10. $y = \frac{5 \sin 14x^3}{x^{11} + 8x^6};$

11. $y = 7^{\arctg^5 \ln x} \cdot \sin \sqrt{x};$
 $e^{\operatorname{tg}^2 x};$

12. $y = \arccos(\ln x) \cdot$

13. $y = \frac{\sqrt[3]{9x^2 + 5x^3 + 6x}}{\ln(3x+2)};$

14. $y = \frac{\sin^2(e^x - 15)}{(2 \arctg x - 5)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\cos 5x)^{\arctg x};$

16. $y = (\arctg 4x^3)^{\log_7^5 x};$

17. $y = \frac{(x+3)^9 \cdot \sqrt[9]{(x-1)^2}}{(6x-5)^4};$

18. $y = \sqrt[3]{\frac{x+7}{x-7}} \ln(\arccos x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y^2 \ln x = 7x^8 - 9y;$

20. $y = \arccos(x - y).$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t; \\ y = 8 \sin^3 t; \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \\ y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}.$

Завдання 8.19.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{4}{x^6} + 3 - \sqrt[5]{x^7} + \frac{2x^7 - x^3\sqrt{x}}{x^4};$

2. $y = (6x^8 + 3x\sqrt{x})\operatorname{ctgx};$

3. $y = \operatorname{arctg} 3x - 6\ln 2x - 4^{9x-3};$

4. $y = \frac{9\log_5 x - 3}{x^5 + 7x^3 - 12x^4};$

5. $y = \operatorname{tg}(e^{7x-13});$

6. $y = \operatorname{arccos}^7 3x;$

7. $y = \ln 7x^2;$

8. $y = \sqrt[6]{\sin^5 3x + 8x^4};$

9. $y = (2x^5 - 8x) \cdot \operatorname{arcsin}^3 14x;$

10. $y = \frac{2\cos 9x^4}{x^3 + 6x^2};$

11. $y = 8^{\sin^2(x^2+2^x)} \cdot \operatorname{arctg}(\ln x);$

12. $y = \cos 9x^3 \cdot \ln \sqrt[7]{x^2 + 3};$

13. $y = \frac{\sqrt[4]{9x^9 - 7x^5 - 2x^3}}{\ln(\sin 8x)};$

14. $y = \frac{\cos^6(9^x - 4)}{(7\operatorname{arctg} x + 3)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{tg} 9x)^{\ln x};$

16. $y = (\operatorname{arctg} 5x^9)^{7x^4-1};$

17. $y = \frac{(12x-3)^6}{(x+4)^9 \cdot \sqrt[5]{(x-3)^2}};$

18. $y = \sqrt[6]{\frac{x-5}{x+5}} \operatorname{tg}(x^2 + 7x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\operatorname{ctgx}^5 = 4x^2 \cdot \sin y;$

20. $y^4 - 4xy + 6x^3 = 0.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = \frac{e^{3t}}{\sqrt{1-t^2}} \\ y = \operatorname{arcsin} 3t \end{cases}.$

Завдання 8.20.

Знайти похідні:

$$1. y = \frac{4x^9 - 3\sqrt[7]{x}}{x^5} + 7x^2 - \frac{5}{x^3} + 16; \quad 2. y = (4x^3 - \sqrt[8]{x}) \arcsin x;$$

$$3. y = 8\cos 5x + \log_7(x + 9) - 7^{3x}; \quad 4. y = \frac{9\sin x + 5}{4x^7 - 5x^4 + 13x};$$

$$5. y = \operatorname{ctg}(5\log_6 3x); \quad 6. y = \arctg^7 7x;$$

$$7. y = \log_3 8x^3; \quad 8. y = \sqrt[9]{\cos^4 5x - 9x^6};$$

$$9. y = (8x^3 + 4x^2) \cdot \arccos^9 2x; \quad 10. y = \frac{7\operatorname{tg} 5x^9}{x^6 + 13x^3};$$

$$11. y = 9^{\log_7^2(9x-17)} \cdot \arcsin \frac{1}{x}; \quad 12. y = \arctg^5 2x \cdot e^{\sqrt{\cos x^5}};$$

$$13. y = \frac{\sqrt[5]{4x^4 + 3x^3 + 2x^2}}{\ln(\cos 12x)}; \quad 14. y = \frac{\operatorname{tg}^7(e^x + 8)}{(5\ln x + 9)^6}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

$$15. y = (\operatorname{ctg} 5x)^{\log_4 x}; \quad 16. y = (\ln 3x^{11})^{\sin^4 x};$$

$$17. y = \frac{(x-2)^4 \cdot \sqrt[9]{(x+1)^4}}{(3x-9)^6}; \quad 18. y = \sqrt[8]{\frac{x+3}{x-3}} \log_4(\operatorname{ctg} 2x).$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

$$19. \operatorname{tg}(y^2 - 4x) = x^2 \ln y; \quad 20. \sin(xy) + \cos(xy) = x.$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$21. \begin{cases} x = t^3 e^t \\ y = t^3 + 3e^t \end{cases}; \quad 22. \begin{cases} x = 5(\cos t + t \sin t) \\ y = 5(\sin t - t \cos t) \end{cases}.$$

Завдання 8.21.

Знайти похідні:

1. $y = 8\sqrt[9]{x^5} + \frac{3x^4 + 8x^5\sqrt{x}}{x^7} + \frac{3}{x^6} + 16;$ 2.

$y = (3x^7 - \sqrt[5]{x^4})\arctg x;$

3. $y = 9^{4x} + \log_7(2x - 7) + \cos 4x;$ 4. $y = \frac{7\cos x - 3}{2x^2 - 4x - 9};$

5. $y = \arcsin(x^2 + \ln x);$

6. $y = \operatorname{arccctg}^5 13x;$

7. $y = \cos 5x^4;$

8. $y = \sqrt[4]{tg^2 14x + 32x^3};$

9. $y = (13x^6 - 8x) \cdot e^{\arccos x^5};$

10. $y = \frac{4ctg 8x^{21}}{x^8 - 5x^3};$

11. $y = 10^{\sin^2(3x+5)} \cdot \arccos \sqrt[3]{x};$

12. $y = \log_2(tg 7x) \cdot e^{\sin^2 x};$

13. $y = \frac{\sqrt[6]{7x^6 - 11x^4 - 22}}{\ln(tg 4x)};$

14. $y = \frac{ctg^8(8^x + 5)}{(4\log_3 x + 5)^7}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\arcsin 3x)^{tg x};$

16. $y = (\log_{10} 6x^5)^{\cos^4 2x};$

17. $y = \frac{(5x-12)^2}{(x-3)^9 \cdot \sqrt[5]{(x+5)^2}};$

18. $y = \sqrt[5]{\frac{x-2}{x+2}} \cos(\ln 3x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\arccos y^4 = 4x^2 \cdot tgy;$

20. $x^3 + x^2 y = xy^2 + y^3.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) \cos t + t \sin t \\ y = \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) \sin t - t \cos t \end{cases}.$

Завдання 8.22.

Знайти похідні:

$$1. y = \frac{10}{\sqrt[3]{x^4}} + 7x^9 - 11 + \frac{6x^3 - 3\sqrt[6]{x^5}}{x^8}; \quad 2. \quad y = (8x^3 + 4x) \arccos x;$$

$$3. y = 4 \ln 2x + 2 \operatorname{tg}(4x - 1) + 5^{2x}; \quad 4. y = \frac{4 \operatorname{tg} x + 5}{4x^7 - 8x^3 - 11x^2};$$

$$5. y = \arccos(5^{5x} - 3); \quad 6. y = \ln^7 5x;$$

$$7. y = \sin 2x^9; \quad 8.$$

$$y = \sqrt[5]{\operatorname{ctg}^7 8x - 9x^6};$$

$$9. y = (7x^8 - 19x^4) \cdot 2^{\operatorname{tg} x^5}; \quad 10. y = \frac{6 \arctg 4x^7}{x^7 - 4x^5};$$

$$11. y = 9^{\ln^8 \operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \sqrt{x^3}; \quad 12. y = \cos(\sqrt[3]{x} - 9) e^{\operatorname{tg} 2x};$$

$$13. y = \frac{\sqrt[7]{2x^3 - 8x^4 + 5x}}{\ln(\operatorname{ctg} 7x)}; \quad 14. y = \frac{\arcsin^6(e^x + 2)}{(7 \cos x - 5)^4}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

$$15. y = (\arccos 4x)^{\operatorname{tg} x}; \quad 16. y = (\sin 9x^2)^{\arcsin^3 7x};$$

$$17. y = \frac{(x+7)^9 \cdot \sqrt[6]{(x-5)^5}}{(4x-13)^2}; \quad 18. y = \sqrt[3]{\frac{x-4}{x+4}} \arccos \sqrt{x}.$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

$$19. x^4 + 4xy + y^4 = 4(x + y); \quad 20. \quad \operatorname{tg}(x^2 + y^2) = x \cdot \cos y.$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$21. \begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}; \quad 22. \begin{cases} x = \frac{7t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{14t}{1+t^2} \end{cases}.$$

Завдання 8.23.

Знайти похідні:

1. $y = 7x + 25 - \frac{2\sqrt{x}-5x^2}{x^4} + \frac{9}{x^{10}};$
2. $y = (\sqrt[5]{x^7} - 4x^3) \cdot e^x;$
3. $y = 10^{2x+5} - \arcsin 4x + \log_5 3x;$
4. $y = \frac{3\arcsin x - 9}{9x^7 - 7x^9 - 13};$
5. $y = \arctg \log_4 5x;$
6. $y = e^{\sin^4 x};$
7. $y = \tg 5x^{12};$
8. $y = \sqrt[4]{\ln^3 2x + 7x^5};$
9. $y = (9x^7 - 6x^4) \cdot \operatorname{arcctg}^5 3x;$
10. $y = \frac{5\cos 8x^{10}}{x^3 - 4x};$
11. $y = 8\operatorname{ctg}^5(3x^2 - 7x) \cdot \arcsin(\ln x);$
12. $y = \ln^7(\sin 3x) \sqrt[7]{\tg^3 6x};$
13. $y = \frac{\sqrt[8]{6x^5 + 3x^8 + 2x}}{\ln(\arcsin 5x)};$
14. $y = \frac{\arccos^7(8^x - 4)}{(3\operatorname{tg} x - 12)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\arctg 7x)^{2x^5};$
16. $y = (\tg 2x^8)^{\arccos^7 6x};$
17. $y = \frac{(7x-2)^6}{(x-2)^3 \cdot \sqrt[7]{(x-1)^3}};$
18. $y = \sqrt[9]{\frac{x-6}{x+6}} \log_2(\operatorname{ctg} 4x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y - x = y \cdot e^x;$
20. $\ln^2 y = 7x^3 \cdot \operatorname{arcctg} y.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$
22. $\begin{cases} x = e^{5t} \cos 3t \\ y = e^{5t} \sin 3t \end{cases}$

Завдання 8.24.

Знайти похідні:

1. $y = 5 - \frac{1}{10\sqrt{x^3}} + 4x^3 + \frac{7^4\sqrt{x^3+2x^7}}{x^5};$ 2. $y = (2x^9 - 3x^3) \cdot 6^x;$

3. $y = 7\cos 4x - \log_2(5x + 4) - 6^{5x};$ 4. $y = \frac{4\arccos x + 2}{5x^2 - 3x - 15};$

5. $y = \operatorname{arctg}(\sin 5x - 4);$ 6. $y = \log_9^4 6x;$

7. $y = \operatorname{ctg} 12x^5;$ 8. $y = \sqrt[8]{\cos^6 5x - 9x^3};$

9. $y = (5x^6 - 9x^3) \cdot \sin^7 6x;$ 10. $y = \frac{3 \cdot e^{\sin^5 3x}}{x^{14} - 14x^8};$

11. $y = 7^{\sin^5(\log_2 x)} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x};$ 12. $y = \log_9(\operatorname{ctg} 4x) e^{\sqrt{\sin 5x}};$

13. $y = \frac{\sqrt[9]{12x^3 - 3x^4 - 6}}{\ln(\arccos 4x)};$ 14. $y = \frac{\operatorname{arctg}^9(e^x + 6)}{(2\ln x - 7)^5}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{arccctg} 8x)^{\ln x};$ 16. $y = (\operatorname{ctg} 5x^4)^{3x^3 + 7};$

17. $y = \frac{(x+4)^{3.3} \sqrt[3]{(x+2)^4}}{(7x-1)^5};$ 18. $y = \sqrt[7]{\frac{x+6}{x-6}} \operatorname{ctg}(x^2 + 4x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x^6 + y^6 = 6x^3y^3;$ 20. $\sqrt{5x - y^2} = x \cdot \ln y.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 1 - t^2; \\ y = t - t^3; \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x = 4\operatorname{ctg} t \\ y = 6\sin^2 t + 3\sin 2t \end{cases}$

Завдання 8.25.

Знайти похідні:

1. $y = 3x^4 \sqrt[5]{x} + \frac{12x^7 + \sqrt{x^9}}{x^4} - 3x^5 - 7$; 2. $y = (10\sqrt{x^7} - 8x) \cdot \ln x$;

3. $y = (4x - 1)^5 - \operatorname{ctg} 3x + \log_7 8x$; 4. $y = \frac{2 \arctg x - 9}{7x^9 + 7x^5 - 5}$;

5. $y = e^{\operatorname{tg}(4x^3 - 12x)}$;

6. $y = \sin^5 3x$;

7. $y = \arcsin 7x^4$;

8. $y = \sqrt[6]{\log_4^9 5x - 14x^5}$;

9. $y = (4x^6 + 9x^5) \cdot \cos^{10} 4x$;

10. $y = \frac{9 \arccos x^5}{x^4 - 4x^5}$;

11. $y = 6^{\cos^4(2x^3 - 6)} \cdot \log_5 \frac{4}{x}$;

12. $y = \arccos \sqrt[9]{x} \cdot \operatorname{ctg}^5 7x$;

13. $y = \frac{\sqrt[8]{5x^2 + 2x - 32}}{\ln(\arctg 8x)}$;

14. $y = \frac{\arctg^7(4^x + 3)}{(5 \log_7 x - 2)^6}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\sin 6x)^{\log_5 x}$;

16. $y = (\arcsin 9x^4)^{\operatorname{tg}^{27} x}$;

17. $y = \frac{(14x - 3)^4}{(x + 2)^5 \cdot \sqrt[3]{(x - 2)^4}}$;

18. $y = \sqrt[6]{\frac{x+3}{x-3}} \log_6(\cos 5x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\operatorname{ctg} x^2 = 5y^5 \cdot \operatorname{tg} x$;

20. $\ln(x + y) = x^3 + y^3$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t \cdot \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = (t^2 + 8) \sin 2t \\ y = (t^2 - 8) \cos 2t \end{cases}$.

Завдання 8.26.

Знайти похідні:

1. $y = 1 - 2\sqrt[8]{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{5x^4 - 6x\sqrt{x}}{x^3};$ 2. $y = (3\sqrt[3]{x^5} + 11)\log_3 x;$

3. $y = 3^{8x+7} + \arccos 2x - 4\ln 7x;$ 4. $y = \frac{5\arctg x + 8}{4x^2 - 2x^3 - 5x};$

5. $y = 2\sqrt{\lg 5x};$ 6. $y = \cos^2 10x;$

7. $y = \arctg 6x^8;$ 8. $y = \sqrt[6]{\sin^9 8x + 8x^2};$

9. $y = (3x^9 - 9x^7) \cdot \tg^3 8x;$ 10. $y = \frac{8\ctg 3x^5}{x^7 - 14x^5};$

11. $y = 5^{\sin^3 \sqrt{x}} \cdot \arcsin 3x^8;$ 12. $y = \log_8(e^{\sin 5x}) \tg^4 6x;$

13. $y = \frac{\sqrt[7]{2x^6 + 3x^5 - 4x^4}}{\ln(\arctg 3x)};$ 14. $y = \frac{\sin^8(6^x - 9)}{(2\arccos x - 5)^9}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\cos 4x)^{\sqrt[3]{x}};$ 16. $y = (\arctg 5x^5)^{\sqrt{\log_7 x}};$

17. $y = \frac{(x-2)^6 \cdot \sqrt[6]{(x-3)^5}}{(2x-9)^4};$ 18. $y = \sqrt[7]{\frac{x-2}{x+2}} \ln(\arctg 4x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\cos^2 x = 9x^3 + 5y^4;$ 20. $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 5(x - y).$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t \cdot \sin t \\ y = t \cdot \cos t \end{cases};$ 22. $\begin{cases} x = (t+1)\ln^2 t \\ y = \frac{\ln^2 t}{t+1} \end{cases}.$

Завдання 8.27.

Знайти похідні:

1. $y = 9x^2 + \frac{\sqrt[3]{x^8 - 9x^8}}{x^4} + 21 - \frac{4}{x^5};$ 2. $y = (5x^5 - \sqrt[9]{x^8}) \cdot \sin x;$

3. $y = 2^{4x+5} + \cos 3x + 4 \arctg 7x;$ 4. $y = \frac{6e^x - 13}{4x^2 + 3x^4 + 9x};$

5. $y = \ln(e^x - 2x^2);$ 6. $y = \tg^6 8x;$

7. $y = \arctg 5x^2;$ 8. $y = \sqrt[5]{\cos^3 7x - 24x^5};$

9. $y = (5x^8 + 4x^3) \cdot \ctg^{11} 3x;$ 10. $y = \frac{9 \sin 7x^3}{x^6 - 2x^4};$

11. $y = 4 \tg^7(5^{x+2}) \cdot \sin \sqrt{x};$ 12. $y = \arctg \sqrt[6]{x} \cdot e^{\sin^5 2x};$

13. $y = \frac{\sqrt[5]{4x^5 - 3x^3 - 2x}}{\log_4(\cos 2x)};$ 14. $y = \frac{\cos^3(9^x + 6)}{(9 \arctg x - 7)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\tg x)^{\arcsin x};$ 16. $y = (\sin 8x^8)^{\frac{12}{\arccos 3x}};$

17. $y = \frac{(4x-7)^5}{(x-9)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+3)^7}};$ 18. $y = \sqrt[6]{\frac{x-4}{x+4}} \log_7(x^2 - x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\arctg y^2 = x^2 \cdot \ln y;$ 20. $\sin(xy) - 8xy = 35.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t \cdot 5^t \\ y = t^5 \cdot \log_5 t \end{cases};$ 22. $\begin{cases} x = \cos t \sqrt{2 \cos 8t} \\ y = \sin t \sqrt{2 \cos 8t} \end{cases}.$

Завдання 8.28.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{13}{\sqrt[5]{x^7}} + 22 - 5x^{10} + \frac{9\sqrt[6]{x^{11}-4x^2}}{x^4}$; 2. $y = (2x^{10} + \sqrt[3]{x}) \cdot \cos x$;

3. $y = 5e^{6x} + \arctg 7x - \ln(x^2 + 1)$; 4. $y = \frac{5 \cdot 8^x - 9}{4x^4 + 7x - 3x^8}$;

5. $y = \log_9(\sin 5x - 8)$; 6. $y = \ctg^4 2x$;

7. $y = e^{tg x^4}$; 8. $y = \sqrt[5]{\arcsin^4 9x - 22x^3}$;

9. $y = (2x^{14} - 5x^4) \cdot \arccos^2 4x$; 10. $y = \frac{8tg 13x^2}{x^3 + 3x^5}$;

11. $y = 3^{\cos^4 \ln x} \cdot \arctg \sqrt[7]{x^5}$; 12. $y = \arccos(e^{2x}) \cdot \sin x^4$

13. $y = \frac{\sqrt[4]{7x^3 - 3x^4 + 6x}}{\log_{10}(\cos 5x)}$; 14. $y = \frac{tg^5(e^x - 22)}{(7 \ln x + 5)^8}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\arccos 2x)^{\frac{1}{x}}$; 16. $y = (\cos 4x^2)^{7x^5 - 1}$;

17. $y = \frac{(x+5)^2 \cdot \sqrt[4]{(x+2)^3}}{(6x-9)^5}$; 18. $y = \sqrt[4]{\frac{x-9}{x+9}} \cos \sqrt{x+5}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x \cdot \sin^2 y = 5y^2 - x$; 20. $x \ln y - y \ln x = 7(x + y)$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 2ctgt \\ y = \cos^2 t - \cos 2t \end{cases}$; 22. $\begin{cases} x = (t^2 + 4)e^{3t} \\ y = \frac{e^{3t}}{t^2 + 4} \end{cases}$.

Завдання 8.29.

Знайти похідні:

$$1. y = 17\sqrt{x^5} + \frac{10x^6 - \sqrt[7]{x^4}}{x^5} + \frac{8}{x^3} - 25; \quad 2. y = (4x^8 - 5x\sqrt[3]{x}) \cdot \operatorname{tg} x;$$

$$3. y = 8\log_3 9x - 4\sin 5x + 3^{x^2-6}; \quad 4. y = \frac{6\ln x - 5}{2x^4 + 3x^3 - 9};$$

$$5. y = \sin(\ln 4x + 3);$$

$$6. y = \arccos^3 9x;$$

$$7. y = 3^{\operatorname{ctg} x^8};$$

$$8. y = \sqrt[6]{\operatorname{arctg}^{13} 2x + 4x^5};$$

$$9. y = (7x^9 - 11x^3) \cdot \arcsin^4 9x; \quad 10. y = \frac{11\cos 8x^7}{x^8 - 3x^4};$$

$$11. y = 2^{\arcsin^5 \sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg}(7x^6 + 5x^2); \quad 12. y = \ln(\operatorname{ctg} 3x) \cdot \sqrt{\cos 3x};$$

$$13. y = \frac{\sqrt[3]{5x^5 - 3x^3 - x}}{\log_8(\operatorname{tg} 6x)};$$

$$14. y = \frac{\operatorname{ctg}^9(7^x - 6)}{(4\log_3 x - 2)^3}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

$$15. y = (\operatorname{arctg} 6x)^{\log_5 x};$$

$$16. y = (\operatorname{tg} 7x^{13})^{\arccos^4 5x};$$

$$17. y = \frac{(5x-6)^7}{(x+3)^4 \cdot \sqrt[6]{(x+1)^5}};$$

$$18. y = \sqrt[4]{\frac{x+7}{x-7}} \log_9(\sin 5x).$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

$$19. \ln \frac{y}{x} = x^2 \cdot y^5;$$

$$20. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 9x^3 \cdot y^3.$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$21. \begin{cases} x = 2t^2 - t^4 \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases};$$

$$22. \begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t} \\ y = t \cdot \ln(1-t) \end{cases}.$$

Завдання 8.30.

Знайти похідні:

$$1. y = 3x^5 \sqrt[3]{x^2} - 5x + 24 + \frac{4x^7 - 9\sqrt[4]{x}}{x^{10}}; \quad 2. y = (6x^7 + 4\sqrt[5]{x}) \cdot \operatorname{ctgx};$$

$$3. y = \ln(2x - 7) + \operatorname{ctg} 8x - 9^{4x-2}; \quad 4. y = \frac{2 \log_3 x - 1}{7x^8 + 6x^5 + 4x};$$

$$5. y = \cos(e^{7x} - 3); \quad 6. y = \arcsin^5 6x;$$

$$7. y = \ln 8x^3; \quad 8. y = \sqrt[14]{\operatorname{arcctg}^3 2x - 5x^7};$$

$$9. y = (8x^2 - 15x^7) \cdot \operatorname{arctg}^4 6x; \quad 10. y = \frac{5 \arccos 4x^9}{x^3 + 2x^7};$$

$$11. y = 9^{\ln^3 \sin x} \cdot \operatorname{arcctg} \sqrt{x}; \quad 12. y = \operatorname{arctg} e^{5x} \cdot \sqrt[3]{\ln^2 3x};$$

$$13. y = \frac{\sqrt[5]{4x^7 - 2x^3 + 6x}}{\log_7(\operatorname{ctg} 3x)}; \quad 14. y = \frac{\arcsin^8(2^x - 1)}{(5 \operatorname{tg} x - 11)^7}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

$$15. y = (\operatorname{arcctg} 4x)^{\sin x}; \quad 16. y = (\operatorname{ctg} 9x^4)^{\log_6^4(x-5)};$$

$$17. y = \frac{(x+4)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+3)^7}}{(7x-1)^5}; \quad 18. y = \sqrt[8]{\frac{x-1}{x+1}} \operatorname{arctg}(\ln x).$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

$$19. \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1; \quad 20. \operatorname{ctg}(x^3 - 3y) = 2y \cdot e^x.$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$21. \begin{cases} x = \ln(1+t) \\ y = \operatorname{arcctg} \sqrt{t} \end{cases}; \quad 22. \begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \cos t - t \cdot \sin t \\ y = \frac{t^2}{2} \sin t + t \cdot \cos t \end{cases}.$$

Тема 9 «ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ»

Приклади розв'язання типового варіанту

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $15^{0,25}$.

Розв'язання. За формулою (6.31):

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx,$$

Зрозуміло, що нам треба визначитися з виглядом функції $f(x)$, величинами x_0 та dx , знайти похідну функції, обчислити значення функції та її похідної у точці x_0 . Виконаємо всі перелічені дії:

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x};$$

$$x_0 = 16; \quad dx = -1;$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}};$$

$$f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2;$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}.$$

Підставимо отримані значення у формулу, знайдемо наближене значення функції:

$$15^{0,25} \approx 2 + \frac{1}{32} \cdot (-1) = 1,96875.$$

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{2x+3}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. За формулою (6.35), рівняння нормалі має вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Обчислимо значення y_0 – ординати точки дотику. Знайдемо похідну функції, обчислимо її значення в точці дотику:

$$y_0 = y(x_0) = \frac{2 \cdot 1 + 3}{2 \cdot 1 - 3} = -5;$$

$$y' = \frac{2(2x-3) - 2(2x+3)}{(2x-3)^2} = \frac{4x-6-4x-6}{(2x-3)^2} = -\frac{12}{(2x-3)^2};$$

$$y'(x_0) = -\frac{12}{(2 \cdot 1 - 3)^2} = -12.$$

Підставимо у формулу (6.35):

$$y + 5 = -\frac{1}{-12}(x - 1);$$

$$y = \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} - 5;$$

$$y = \frac{1}{12}x - \frac{61}{12}.$$

3. З'ясувати, який кут утворює з віссю абсцис дотична до графіку функції $y = x^2 - 5x + 8$, яка проведена в точці $x_0 = 3$. Записати рівняння дотичної.

Розв'язання. За визначенням 6.6, кутовий коефіцієнт дотичної (кут її нахилу до осі абсцис) дорівнює значенню похідної в точці дотику (6.32):

$$k_\theta = y'(x_0).$$

Знайдемо похідну:

$$y' = 2x - 5;$$

обчислимо її значення у точці дотику:

$$y'(x_0) = 2 \cdot 3 - 5 = 1.$$

За визначенням кутового коефіцієнта

$$k_\theta = 1 = \operatorname{tg} \varphi;$$

отже, дотична утворює з віссю абсцис кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Запишемо рівняння дотичної (6.33):

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Обчислимо $y_0 = 3^2 - 5 \cdot 3 + 8 = 2$. Підставимо у формулу:

$$y - 2 = 1(x - 3).$$

Остаточо маємо:

$$y = x - 1.$$

4. Закон руху матеріальної точки $s = t^3 - 2t^2 + 4t + 9$.

Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 2$ с.

Розв'язання. За формулами (6.36) та (6.37) швидкість та прискорення руху дорівнюють першій та другій похідним відповідно від закону руху матеріальної точки:

$$v = s'(t); \quad a = v'(t) = s''(t).$$

Знайдемо похідні та обчислимо їх значення через $t = 2$ с:

$$v = s' = 3t^2 - 4t + 4; \quad v(2) = 12 - 8 + 4 = 8^{\text{м/с}};$$

$$a = v' = s'' = 6t - 4; \quad a(2) = 12 - 4 = 8^{\text{м/с}^2}.$$

5. Обчислити границі функцій:

$$\text{а). } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + e^{2x} - 5x}{x^2}.$$

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$. Саме з такими невизначеностями можна впоратися за допомогою правила Лопітала. Згідно (6.47) границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + e^{2x} - 5x}{x^2} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x} + 2e^{2x} - 5}{2x} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

підставимо граничне значення аргументу, знову отримуємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$. Згадаємо, що правило Лопітала можна використовувати стільки разів, скільки в цьому є необхідність. Замінімо границю відношення функцій границею відношення їх похідних ще раз:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9e^{3x} + 4e^{2x}}{2} = \frac{13}{2}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{13}{2}$.

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right].$$

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримаємо невизначеність типу $|\infty - \infty|$. Перед тим, як застосувати правило Лопітала, ми повинні виконати перетворення, а саме: привести дробі до спільного знаменника:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right] &= |\infty - \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x} \operatorname{arctg} x + \operatorname{tg} x \frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos^2 x - 1 - x^2}{(1+x^2)\cos^2 x}}{\frac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x + \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x}{(1+x^2)\cos^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1 - x^2}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\sin 2x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x \sin x - 2x}{2x \operatorname{arctg} x + \cos 2x} = \frac{0}{1} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Як бачимо, правилом Лопіталя ми були вимушені скористатися двічі, попередньо спростив функцію.

Відповідь. Границя функції дорівнює 0.

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} (8x \cdot ctgx).$$

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримаємо невизначеність типу $|0 \cdot \infty|$. Функція представлена у вигляді добутку. Для того, щоб скористатися правилом Лопіталя ми повинні записати функцію у вигляді відношення функцій. Для цього замінімо множення на $ctgx$ діленням на обернену функцію, тобто на $\frac{1}{ctgx} = tgx$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (8x \cdot ctgx) &= |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{\frac{1}{ctgx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{tgx} = \left| \frac{0}{0} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{8}{1} = 8. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює 8.

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}}.$$

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримаємо невизначеність типу $|\infty^0|$. Функція має вигляд степеневно-показникової. Для того, щоб скористатися правилом Лопіталя, прологарифмуємо границю. Задану границю позначимо як A , знайдемо її логарифм

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} &= |\infty^0| = A; \\ \ln A &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(1 + xe^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + xe^x)}{x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \end{aligned}$$

Тепер використання правила Лопіталя можливо. Обчислимо границю:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x + xe^x}{(1 + xe^x)}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(1+x)}{1 + xe^x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(1+x) + e^x}{e^x + xe^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(1+x+1)}{e^x(1+x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x+1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Ми знайшли $\ln A$, двічі звернувшись до правила Лопітала та виконав необхідні перетворення, щоб повернутися до заданої границі, згадаємо основну властивість показникової функції:

$$A = e^{\ln A} = e^1 = e.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює e .

6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = 2x^4 - 4x^2 - 5$.

Розв'язання. Дослідження проведемо за схемою, представленою у п. 6.4.3:

- ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$;

- знайдемо y'

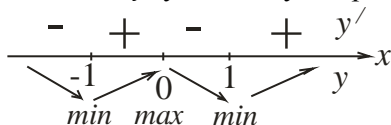
$$y' = 8x^3 - 8x;$$

- знайдемо критичні точки

$$y' = 0: \quad 8x^3 - 8x = 0; \quad x(x-1)(x+1) = 0;$$

$$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -1;$$

- нанесемо на числову вісь критичні точки та дослідимо знак y' у кожному з отриманих інтервалів



в точках з абсцисами $x = \pm 1$ - мінімуми, в точці з абсцисою $x = 0$ - максимум.

Обчислимо екстремальні значення функції.

$$y(-1) = 2(-1)^4 - 4(-1)^2 - 5 = -7;$$

$$y(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1^2 - 5 = -7;$$

$$y(0) = 0 - 0 - 5 = -5.$$

Відповідь. Функція зростає на інтервалах $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, спадає - $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$; в точках $M_1(-1; -7)$ та $M_3(1; -7)$ - мінімуми функції, в точці $M_2(0; -5)$ - максимум.

$$б) y = \frac{x^2+7}{x+3}.$$

Розв'язання:

- ОДЗ: $x + 3 \neq 0$; $x \neq -3$;

- знайдемо y'

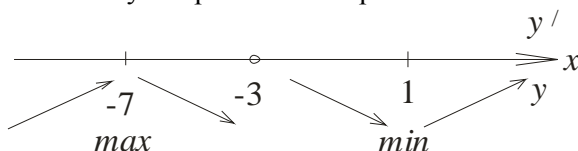
$$y' = \frac{2x(x+3) - (x^2+7) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-x^2-7}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2};$$

- знайдемо критичні точки

$$y' = 0: \quad x^2 + 6x - 7 = 0;$$

$$\Rightarrow x_1 = -7; \quad x_2 = 1;$$

- нанесемо на числову вісь критичні точки та точку, в якій функція не існує ($x = -3$), дослідимо знак y' у кожному з отриманих інтервалів



в точці з абсцисою $x = 1$ - мінімум, в точці з абсцисою $x = -7$ - максимум.

Обчислимо екстремальні значення функції.

$$y(1) = \frac{1+7}{1+3} = \frac{8}{4} = 2;$$

$$y(-7) = \frac{49+7}{-7+3} = \frac{56}{-4} = -14.$$

Відповідь. Функція зростає на інтервалах $x \in (-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$, спадає – $x \in (-7; -3) \cup (-3; 1)$; в точці $M_1(1; 2)$ - мінімум функції, в точці $M_2(-7; -14)$ - максимум.

7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

$$а) y = 3x^4 - 4x^3 - 6x + 15.$$

Розв'язання. Дослідження проведемо за схемою, представленою у п. 6.4.6:

- ОДЗ: $x \in R$;

- знайдемо y'' :

$$y' = 12x^3 - 12x^2 - 6;$$

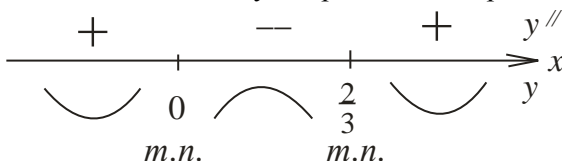
$$y'' = 36x^2 - 24x;$$

- знайдемо критичні точки:

$$y'' = 0: \quad 36x^2 - 24x = 0; \quad 12x(3x - 2) = 0;$$

$$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

- нанесемо на числову вісь критичні точки та точки, в яких функція не існує та дослідимо знак другої похідної в кожному з отриманих інтервалів



Обчислимо ординати точок перегину:

$$y(0) = 15;$$

$$y\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{2}{3}\right) + 15 = \frac{281}{27}.$$

Відповідь. Функція опукла на інтервалі $x \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$, угнута

- $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$, в точках $P_1(0; 15)$, $P_2\left(\frac{2}{3}; \frac{281}{27}\right)$ - точки перегину функції.

$$\text{б) } y = (x + 1)\arctg x.$$

Розв'язання:

- ОДЗ: $x \in R$;

- знайдемо y'' :

$$y' = \arctg x + (x + 1) \cdot \frac{1}{1+x^2} = \arctg x + \frac{x+1}{1+x^2};$$

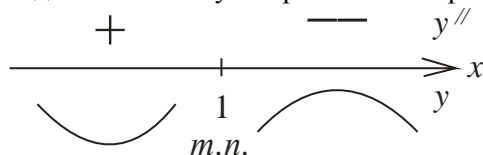
$$y'' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-(x+1) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-2x^2-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x}{(1+x^2)^2};$$

- знайдемо критичні точки:

$$y'' = 0: \quad \frac{2-2x}{(1+x^2)^2} = 0; \quad 2 - 2x = 0;$$

$$\Rightarrow x = 1.$$

- нанесемо на числову вісь критичні точки та точки, в яких функція не існує та дослідимо знак другої похідної в кожному з отриманих інтервалів



Обчислимо ординату точки перегину:

$$y(1) = (1 + 1)\arctg 1 = 2 \cdot \arctg 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь. Функція опукла на інтервалі $x \in (1; +\infty)$, угнута - $x \in (-\infty; 1)$, в точці $P\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ - точка перегину функції.

8. Знайти асимптоти функції:

$$a) y = \frac{3x^2 - x + 2}{x + 5}.$$

Розв'язання: Визначення та рівняння асимптот функції см. п. 6.4.7:

- ОДЗ: $x + 5 \neq 0$; $x \neq -5$.
- перевіримо, чи є пряма $x = -5$ - вертикальною асимптотою (6.49):

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{3x^2 - x + 2}{x + 5} = \frac{75 + 5 - 2}{-5 + 5} = \frac{78}{0} = \infty;$$

\Rightarrow пряма $x = -5$ є вертикальною асимптотою;

- похилу асимптоту шукаємо у вигляді (6.53):

$$y = kx + b;$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт (6.51) асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x};$$

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x^2 - x + 2}{x + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{x^2 + 5x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x - 1}{2x + 5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6}{2} = 3; \end{aligned}$$

та відрізок, який відсікає асимптота на осі ординат (6.52):

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx);$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2 - x + 2}{x + 5} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - x + 2 - 3x^2 - 15x}{x + 5} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-16x + 2}{x + 5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-16}{1} = -16;$$

Отже, рівняння похилої асимптоти має вигляд:

$$y = 3x - 16.$$

Відповідь. Функція має вертикальну асимптоту $x = -5$ та похилу асимптоту $y = 3x - 16$.

$$б) y = (x - 7)e^{x+3}.$$

Розв'язання:

- ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$;
- вертикальної асимптоти нема.
- похилу асимптоту шукаємо у вигляді (6.53):

$$y = kx + b;$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт (6.51) асимптоти. Зауважимо, що обчислювати границі будемо окремо при $x \rightarrow +\infty$ та $x \rightarrow -\infty$ (поведінка функції суттєво відрізняється):

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x};$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-7)e^{x+3}}{x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+3} + (x-7)e^{x+3}}{1} = \infty$$

при $x \rightarrow +\infty$ похилої асимптоти не існує,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-7)e^{x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-7)}{xe^{-(x+3)}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-(x+3)} - xe^{-(x+3)}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

при $x \rightarrow -\infty$ асимптота існує, але при $k = 0$ похила асимптота перетворюється в горизонтальну.

Відповідь. Функція має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$.

9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік: $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$.

Розв'язання: Загальна схема дослідження функції приведена в п. 6.4.8. Проведемо дослідження за схемою.

- ОДЗ: $x^2 - 1 \neq 0$; $x^2 \neq 1$; $x \neq \pm 1$;

$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

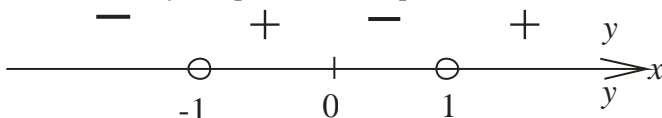
- Знайдемо точки перетину з осями координат:

Ох: $y = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2-1} = 0$; $x = 0$;

Оу: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 0}{0^2-1} = 0$;

функція перетинається з осями координат в початку координат – в точці $O(0; 0)$.

- Знайдемо інтервали знакопостійності. Нанесемо на числову вісь точки перетину з віссю абсцис та точки, в яких функція не існує, дослідимо знак функції в кожному з отриманих інтервалів:



Отже, функція додатна на інтервалі $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, від'ємна - $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

- Перевіримо функцію на парність:

$$y(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2-1} = -\frac{2x}{x^2-1} = -y(x);$$

функція непарна, а з цього прямує, що її графік симетричний відносно початку координат.

- Періодичність. Функція не періодична.

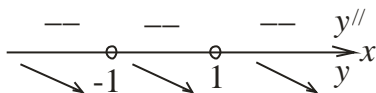
- Дослідимо функцію на монотонність та екстремуми.

Ми детально розглянули цю схему у завданні 6.

$$y' = \frac{2(x^2-1)-2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2};$$

$$y' = 0: \quad -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2} = 0; \quad 2x^2 + 2 = 0; \quad 2x^2 \neq -2,$$

критичних точок нема, тому й екстремумів у функції нема. Дослідимо на монотонність:



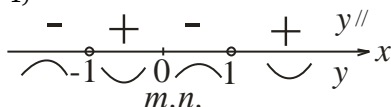
Функція спадає на всій області визначеності. Екстремумів нема.

- Дослідимо функцію на опуклість, угнутість та точки перегину. Ми детально розглянули цю схему у завданні 7.

$$y'' = -\frac{4x(x^2-1)^2 - (2x^2+2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = -\frac{4x(x^2-1)[x^2-1-2x^2-2]}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3};$$

$$y'' = 0; \quad \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0; \quad x = 0;$$



Знайдемо асимптоти функції (см. завдання 8):

- вертикальні асимптоти

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2}{(-1)^2-1} = -\frac{2}{0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{1^2-1} = \frac{2}{0} = +\infty;$$

прямі $x = -1$ та $x = 1$ - вертикальні асимптоти.

- похила асимптота $y = kx + b$:

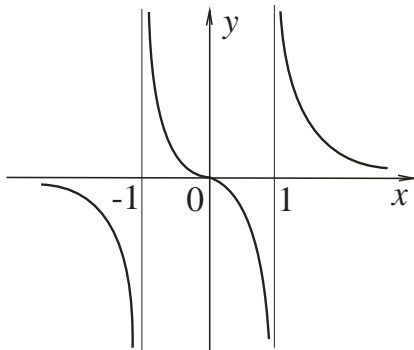
$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^3-x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{3x^2-2x} = \frac{2}{\infty} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{2x} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

похила асимптота перетворюється в горизонтальну $y = 0$.

Об'єднаємо отримані результати дослідження на графіку функції:



10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{2x}{1+x^4}$ на інтервалі $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

Розв'язання: Схема дослідження функції на найбільше та найменше значення функції в замкненому інтервалі приведена в п. 6.4.4. Проведемо дослідження за схемою.

ОДЗ: $x \in R$

Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{2(1+x^4) - 2x \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{2+2x^4-8x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}.$$

Критичні точки функції:

$$y' = 0: \quad \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} = 0; \quad 2-6x^4 = 0; \quad x^4 = \frac{1}{3}; \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}};$$

точка $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ не належить досліджуваному інтервалу.

Обчислимо значення функції в критичній точці $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

та кінцях інтервалу:

$$y(-2) = \frac{2 \cdot (-2)}{1+(-2)^4} = \frac{-4}{1+16} = -\frac{4}{17};$$

$$y\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4} = -\frac{\frac{2}{\sqrt[4]{3}}}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{\frac{2}{\sqrt[4]{3}}}{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \sqrt[4]{27};$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{1+\frac{1}{16}} = \frac{1}{\frac{17}{16}} = \frac{16}{17}.$$

З них найбільше - $y_{\text{найб.}} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{17}$, а найменше - $y_{\text{наим.}} = y\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\frac{1}{2} \sqrt[4]{27}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 9**Завдання 9.1.**

1. Знайти наближене значення функції $y = 5x^4 - 3x^2 + 6\ln x$ при $x = 1,005$.
2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x+8}$ в точці з абсцисою $x_0 = -4$.
3. Дано параболу $y = -x^2$. З'ясувати, в якій точці параболи нормаль до неї перпендикулярна прямій $y = 2x - 1$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{6}{x} \right)$
 - г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (tg x)^{2x-\pi}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = 5x^4 - 10x^2 + 13$;
 - б) $y = \frac{7}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;
 - б) $y = x \cdot \ln x$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 2}$
 - б) $y = \frac{e^{x+2}}{x-3}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = x^3 - 5x$;
 - б) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$$
на інтервалі $[1; 5]$.

Завдання 9.2.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\arctg 1,003$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 16$ в точці з абсцисою $x_0 = 3$.
3. З'ясувати, в якій точці кривої $y = \sqrt[3]{x}$ кут нахилу дотичної до додатного напрямку осі абсцис дорівнює $\frac{\pi}{6}$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 5t - 16$. Визначити швидкість руху через $t = 2$ с.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right]$
 - г) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = 2x^2 + 4x + 1$;
 - б) $y = \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + 5}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = x^3 - 3x - 5$;
 - б) $y = x \cdot e^{-x^2}$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{7x^2 - 2x - 5}{x^2 - 9}$
 - б) $y = 3 \ln \frac{x}{x+5} - 4$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$;
 - б) $y = x - \ln(x + 1)$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 - 3x^2$ на інтервалі $[-1; 4]$.

Завдання 9.3.

- Знайти наближене значення функції $y = 2x^3 + 3x^2 - 5\arcsin x$ при $x = 0,01$.
- Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 6x - 13$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
- На кривій $y = x^2 - 7x + 13$ знайти точку, нормаль в якій паралельна прямій $y = \frac{1}{5}x + 2$.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 12t + 7$. З'ясувати, у який момент часу її швидкість дорівнювала 4 м/с.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right)$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}} \right)$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = 5x^6 - 6x^5$;	б) $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$.
------------------------	--------------------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 7$;	б) $y = \ln(1 + x^2)$.
---	-------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{5x^2 + x - 4}{x + 3}$	б) $y = (x - 7)e^{x+4}$.
-------------------------------------	---------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = x^3 + 3x^2 - 18x$;	б) $y = x^2 \cdot e^{1-x}$.
-----------------------------	------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \left(\frac{1}{5} \right)^{x^2 - 5x + 4}$$

на інтервалі $[-2; 3]$.

Завдання 9.4.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\sin 29^\circ$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 5x^2 - 3x + 19$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.
3. Записати рівняння дотичної до параболи $y = x^2 - 3x + 2$ в точці перетину її з віссю ординат.
4. Дві матеріальні точки рухаються прямолінійно рівномірно вздовж осі абсцис, їх закони руху задані рівняннями $s = t^2 + 8t - 5$ і $s = 3t^2 - 5t + 1$. Визначити, в який момент часу їх швидкості будуть рівними.
5. Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos 2x}{e^{5x} - \cos 5x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 \cdot e^{-5x})$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{tg x}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = 6x^2 - 2x^3$;	б) $y = \frac{7x}{\ln x}$.
------------------------	-----------------------------
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 2$;	б) $y = \frac{x^3}{1+12^x}$.
---------------------------	-------------------------------
8. Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{9x^2 - 2x - 7}{x^2 - 1}$	б) $y = 6 \ln \frac{x}{x-5} - 3$.
--	------------------------------------
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = x^3 - 9x^2 + 18x$;	б) $y = \frac{x^2 - 4}{x+1}$.
-----------------------------	--------------------------------
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
 $y = x \cdot \ln x$
 на інтервалі $\left[\frac{1}{10}; 1 \right]$.

Завдання 9.5.

1. Знайти наближене значення функції $y = 3x^8 + 2x^5 - 4e^x$ при $x = 0,03$.
2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \ln(1 + x)$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.
3. Записати рівняння нормалей до кривої $y = x^2 + 2x - 1$ в точках перетину її з кривою $y = -2x^2$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = t^3 - 2t^2 - t$. Визначити швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 5$ с після початку руху.
5. Обчислити границі функцій:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{e^x - e} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \cdot \ln x)$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
а) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$; б) $y = \frac{\ln x + 4}{x}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 15$; б) $y = x + \arctg x$.
8. Знайти асимптоти функції:
а) $y = \frac{x^2 + x + 3}{3x - 1}$ б) $y = xe^{-x^2}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
а) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$; б) $y = \frac{e^x}{x}$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
 $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$
на інтервалі $[-1; 1]$.

Завдання 9.6.

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\sin 61^\circ$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{x^2-5}{2x^2+1}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
- З'ясувати кут нахилу дотичної до графіку функції $y = \frac{1}{4}x^4$ в точці $M\left(1; \frac{1}{4}\right)$.
- Закон руху матеріальної точки $s = 9t - 2t^3$. Визначити швидкість руху та прискорення матеріальної точки через $t = 5$ с.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - t g x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{3}{1-x^3} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln^3 x)$	г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$;	б) $y = \ln(25 - x^2)$.
--------------------------------	--------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = x^4 - 2x^2 - 8$;	б) $y = (x - 5)e^{x+1}$.
---------------------------	---------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{x^2+9x+11}{x^2-25}$	б) $y = 5 \ln \frac{x+3}{x+4} - 2$.
-----------------------------------	--------------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = x^3 - 3x^2$;	б) $y = x + \frac{\ln x}{x}$.
-----------------------	--------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{x+1}{e^x}$$
 на інтервалі $[-1; 1]$.

Завдання 9.7.

- Знайти наближене значення функції $y = 9x^3 + 7x^2 - 3\ln x$ при $x = 1,01$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = tg 4x$ в точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{16}$.
- Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{4 - 5x}$ в точці її перетину з прямою $2x + y - 1 = 0$.
- Дві матеріальні точки рухаються прямолінійно рівномірно, закони руху їх задані рівняннями $s = 3t^2 + 7t + 14$ і $s = 2t^2 + 4t + 24$. Визначити швидкості матеріальних точок у момент зустрічі.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^3 - 8}$;	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right)$	г) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = \frac{1}{6}x^6 - \frac{4}{5}x^5$;	б) $y = x \cdot \ln x$.
--	--------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = 5x^3 - 3x^5$;	б) $y = \left(\frac{x+1}{x} \right)^2$.
------------------------	---
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{8x^2 - 7x + 1}{x - 5}$	б) $y = \frac{e^{x+4}}{x+5}$.
--------------------------------------	--------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = x^4 - 2x^2 - 3$;	б) $y = x^2 \cdot e^{-x^2}$.
---------------------------	-------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$$

на інтервалі $[-1; 1]$.

Завдання 9.8.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\arccos 0,098$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = e^{-3x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.
3. Записати рівняння горизонтальної дотичної до параболи $y = 3x^2 + 6x + 7$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{3}{4}t^4 - \frac{5}{3}t^3 + 2t^2 - 4t + 3$.
Визначити швидкість руху через $t = 1$ с.
5. Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 6^x}{4x - 8x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{5}{x} \right)$	г) $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{tg \frac{\pi x}{2}}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 3$;	б) $y = x \cdot \ln^2 x$.
---------------------------	----------------------------
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 8x - 3$;	б) $y = (x - 3)e^{x+1}$.
---	---------------------------
8. Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{4x^2 + 5x + 1}{x^2 + 4x}$	б) $y = 4 \ln \frac{x}{x+3} - 1$.
---	------------------------------------
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = 2x^4 - x^2 + 1$;	б) $y = e^{\frac{1}{x}}$.
---------------------------	----------------------------
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
 $y = \ln(x^2 - 2x + 4)$
 на інтервалі $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$.

Завдання 9.9.

1. Знайти наближене значення функції $y = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 2e^x$ при $x = 0,02$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x + \frac{2}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
3. Записати рівняння дотичних до графіку функції $y = x^3 - 12x + 3$, паралельних прямій $4x - y + 5 = 0$.
4. Вздовж осі абсцис рухаються прямолінійно дві матеріальні точки, закони руху яких $s = t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 13t - 9$ і $s = \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 7t + 5$. З'ясувати, в який момент часу їх швидкості дорівнювали.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(8^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \cdot x$
 - г) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = \frac{5}{3}x^3 - 10x$;
 - б) $y = \frac{x^3 - x^2}{e^{2x}}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = \frac{5}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7$;
 - б) $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{2x^2 + 9x + 1}{x - 7}$
 - б) $y = 2 \ln \frac{x+1}{x-1} - 7$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = x^3 - 3x^2 - 12x$;
 - б) $y = \frac{1}{x^2} + x^2$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 2x^3 - 39x^2 + 252x + 1$ на інтервалі $[5; 8]$.

Завдання 9.10.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\arcsin 0,54$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^3 + 2x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
3. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \frac{x+2}{x-2}$, яка паралельна прямій, що проходить через точки $A(1; -7)$ і $B(-2; 5)$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 - 8t^3 + 6t^2 - t + 9$. Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 4$ с.
5. Обчислити границі функцій:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin 10x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
а) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$; б) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
а) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3$; б) $y = 5 \ln \frac{x}{x-3}$.
8. Знайти асимптоти функції:
а) $y = \frac{5x^2 - 6x - 11}{3x^2 + 9x}$ б) $y = \frac{e^{x+4}}{x-2}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
а) $y = 4x^5 - 5x^4$; б) $y = \left(\frac{x+1}{x} \right)^2$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
 $y = 2x - 3 \cdot \ln x$
на інтервалі $[1; e]$.

Завдання 9.11.

- Знайти наближене значення функції $y = 5x + x^2$ при $x = 1,003$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{3}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = -3$.
- Записати рівняння дотичних до кривої $y = \frac{2x+1}{x+1}$, перпендикулярних до прямої $y = -x - 3$.
- Вздовж осі абсцис рухаються прямолінійно дві матеріальні точки, закони руху яких $s = 3t^2 + 4t + 5$ і $s = 2t^2 + 5t + 7$. З'ясувати, з якою швидкістю віддаляються матеріальні точки в момент зустрічі.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2}{x-2} - \frac{x+4}{x^2-x-2} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$	г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{t \operatorname{g} 2x}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 10x + 14$;	б) $y = (x-3)e^{x+2}$.
---	-------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = 6x^5 - 5x^6$;	б) $y = x^2 - 2 \ln x$.
------------------------	--------------------------
- Знайти асимптоти функцій:

а) $y = \frac{9x^2-x-3}{3x-15}$	б) $y = (3x-7)e^{2x}$.
---------------------------------	-------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = \frac{9}{2}x - \frac{1}{6}x^3$;	б) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$.
--	------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$
 на інтервалі $[1; 4]$.

Завдання 9.12.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $17^{0,25}$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^2 + 4x + 16$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
3. Записати рівняння дотичної до параболи $y = x^2 + 5$ в точці перетину її з віссю ординат.
4. Закон руху матеріальної точки $s = -2t^2 + \frac{20}{3}\sqrt{(t+5)^3} + 30t$. Визначити швидкість та прискорення руху матеріальної точки на початку руху ($t = 0$).
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{tgx} - e^x}{tgx - x}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^5 \cdot \sin \frac{2}{x} \right)$
 - г) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = \frac{1}{8}x^8 - \frac{2}{7}x^7 - 9$;
 - б) $y = x - 5 \arctg x$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 9x - 4$;
 - б) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 8x}$
 - б) $y = 9 \ln \frac{x-3}{x} - 2$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = 6x^4 - 4x^6$;
 - б) $y = x^2 - 2 \ln x$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 \cdot e^{x+1}$ на інтервалі $[-4; 0]$.

Завдання 9.13.

1. Знайти наближене значення функції $y = 4x^4 - 8e^{2x}$ при $x = 0,04$.
2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = 7x^2 - 6x + 5$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.
3. Знайти кутовий коефіцієнт нормалі до кривої $y = \frac{5}{9} \left(\frac{x-1}{x+5} \right)^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{3}{4}t^4 + 5t^3 - 7t + 12$. Знайти швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 3$ с після началу руху.
5. Обчислити границі функцій:
 - a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$
 - г) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - a) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 8$;
 - б) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - a) $y = 2x^3 - 13x^2 + 23x$;
 - б) $y = \arctg(x^2)$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - a) $y = \frac{6x^2-4x-2}{x+5}$
 - б) $y = \frac{e^{x+4}}{x+8}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - a) $y = x^3 - 12x$;
 - б) $y = \ln \frac{x}{x+5} - 4$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{2+x^2}{1-x^2}$$

на інтервалі $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Завдання 9.14.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $e^{0,3}$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{4}{x^2}$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
3. На кривій $y = 5x^2 + 10x - 3$ знайти точку, дотична в якій паралельна прямій $y = 20x - 7$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - t + 3$. Визначити, в який момент часу її швидкість дорівнювала 9 м/с.
5. Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	г) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2$;	б) $y = x - \ln(x + 3)$.
------------------------------------	---------------------------
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = 4x^3 - x^4$;	б) $y = e^{\frac{1}{x}}$.
-----------------------	----------------------------
8. Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 1}$	б) $y = (x - 3)e^{x+4}$.
---------------------------------------	---------------------------
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x$;	б) $y = \frac{x^3 - 8}{x}$.
---	------------------------------
10. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = e^{4x - x^2}$$
 на інтервалі $[1; 3]$.

Завдання 9.15.

1. Знайти наближене значення функції $y = 7x^2 + 4\ln x$ при $x = 1,02$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{8}{x} + 6\sqrt{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 4$.
3. Записати рівняння горизонтальної дотичної до параболи $y = 9x^2 - 18x + 5$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 + 8t^3 - t^2 + 2t - 4$. Знайти швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 4$ с після начала руху.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 7x}{\ln \sin 3x}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{e^x - e^2} - \frac{5}{x - 2} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{3x}) \operatorname{ctg} x$
 - г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{5}{x} \right)^x$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = \frac{9}{2}x - \frac{1}{6}x^3$;
 - б) $y = \frac{e^x}{2x+8}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5$;
 - б) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.
8. Знайти асимптоти функцій:
 - а) $y = \frac{8x^2 + 3x + 1}{x + 9}$
 - б) $y = 7 \ln \frac{x-7}{x} + 3$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$;
 - б) $y = \ln(9 - x^2)$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$
11. на інтервалі $[-4; 4]$.

Завдання 9.16.

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\cos 151^\circ$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = 7x^2 - 2x + 5$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
- Записати рівняння дотичної до кривої $y = \ln(x^2)$, яка паралельна прямій $y = -x$.
- Закон руху матеріальної точки $s = t^4 + \frac{7}{3}t^3 - 2t^2 + 8t - 7$.
Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 4$ с.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin 5x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1-x} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^3 \cdot \sin \frac{5}{x^3} \right)$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 5$;	б) $y = x^2 - 2 \ln x$.
---------------------------	--------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = 10 + 7x - x^2 - \frac{1}{6}x^3$;	б) $y = (x + 7) \cdot e^{2x}$.
---	---------------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{x^2 - 4x - 8}{x^2 - 8}$	б) $y = 3 \ln \frac{x+2}{x-2} + 4$.
---------------------------------------	--------------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$;	б) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.
----------------------------	---------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{2x-1}{2+x^2}$$
 на інтервалі $[-2; 0]$.

Завдання 9.17.

- Знайти наближене значення функції $y = x^3 - 5x^2 + 2\sqrt[3]{x}$ при $x = 8,001$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = tg8x$ в точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{32}$.
- З'ясувати, який кут утворює з віссю абсцис дотична до кривої $y = x - x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
- Дві матеріальні точки рухаються прямолінійно вздовж осі абсцис, їх закони руху $s = \frac{4}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 9t + 11$ і $s = \frac{5}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 4t - 7$. Визначити моменти часу, коли їх швидкості зрівнюються.
- Обчислити границі функцій:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\sin 4x}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 2x) \operatorname{ctg} 4x$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 5x)^{\frac{1}{\ln 2x}}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - $y = -2x^3 + 6x^2 + 7$;
 - $y = x^2 - \ln x^2$.
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - $y = \frac{1}{6}x^3 - 6x^2 + 4x + 9$;
 - $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$.
- Знайти асимптоти функції:
 - $y = \frac{x^2 + 5x + 1}{3x + 1}$
 - $y = \frac{e^{x+5}}{x+6}$.
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - $y = \frac{1}{4}x^4 - x$;
 - $y = (x - 1)e^{1-x}$.
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \sqrt{x - x^3}$$
 на інтервалі $[-2; 2]$.

Завдання 9.18.

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\ln 0,99$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{11}{2}x^2 + x - 8$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
- З'ясувати, в якій точці координатній площини xOy пряма $x + 4y - 4 = 0$ дотикається гіперболи $y = \frac{1}{x}$.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{3}{4}t^4 - \frac{5}{3}t^3 + 8t^2 + t - 7$. Визначити швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 3$ с після начала руху.
- Обчислити границі функцій:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{ctgx} - 1}{x^2}$;
 - $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \left[\frac{5}{5x-1} - \frac{1}{\ln 5x} \right]$;
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 \cdot e^{-7x})$
 - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (t \operatorname{gx})^{2x-\pi}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - $y = 10 + \frac{5}{2}x - x^2 - \frac{1}{6}x^3$;
 - $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - $y = 5x^3 - 3x^5$;
 - $y = 2 \ln \frac{x+4}{x} - 5$.
- Знайти асимптоти функції:
 - $y = \frac{6x^2 - 2x + 3}{x^2 - 64}$
 - $y = (4x - 8)e^{2-x}$.
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - $y = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4$;
 - $y = x^2 + \frac{1}{x}$.
- Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{x}{2+x^3}$ на інтервалі $[0; 3]$.

Завдання 9.19.

1. Знайти наближене значення функції $y = (x^2 + 1)e^x$ при $x = 0,01$.
2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x + 8}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
3. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 3x^2 + 4$, паралельної прямій $y = -\frac{1}{6}x + 8$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{3}t^3 + 5t^2 - 8$. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.
5. Обчислити границі функцій:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3tg5x - 15tgx}{3sin5x - 15sinx}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2arctgx) \ln x$ г) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{1+\ln x}}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
а) $y = 4x^3 - 12x^2 - 8$; б) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
а) $y = 2x^4 - 8x^2 - 7x + 2$; б) $y = x \cdot \ln x$.
8. Знайти асимптоти функції:
а) $y = \frac{2x^2 - 8x - 3}{x - 7}$ б) $y = \frac{e^{x-5}}{x-2}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
а) $y = 3x - x^3$; б) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$y = \frac{2}{3}x^3 - 2x$$

на інтервалі $[0; 2]$.

Завдання 9.20.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\sqrt[3]{8,012}$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 3x^2 - 2x + 5$ в точці з абсцисою $x_0 = 5$.
3. З'ясувати кут нахилу до осі Ox дотичної до кривої $y = \frac{1}{8}x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 19t - 15$. З'ясувати моменти часу, коли швидкість матеріальної точки дорівнює 12 м/с.
5. Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \cdot \sin x^2}$;	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} (ctg x)^{\frac{1}{\ln 2x}}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = \frac{2}{3}x^3 - 8x^2 + 15$;	б) $y = \frac{x^3 - 8}{x^2}$.
---------------------------------------	--------------------------------
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = 1 + 3x + 3x^2 - x^3$;	б) $y = (2x - 1)e^{x-5}$.
--------------------------------	----------------------------
8. Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{5x^2 - 7x - 12}{x^2 - 3x}$	б) $y = 6 \ln \frac{x+5}{x} + 3$.
--	------------------------------------
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = 3x^4 - 16x^3$;	б) $y = x \cdot \ln x$.
-------------------------	--------------------------
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
 $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$
 на інтервалі $[-1; 2]$.

Завдання 9.21.

1. Знайти наближене значення функції $y = x^2 + x + \arcsin x$ при $x = 0,51$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{x-8}$ в точці з абсцисою $x_0 = 9$.
3. З'ясувати, під яким кутом нахилена дотична до графіка функції $y = \frac{2}{3}x^3$ в точці $M\left(1; \frac{2}{3}\right)$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 12t - 35$. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.
5. Обчислити границі функцій:
а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \sin x) \operatorname{ctg} x$ г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$; б) $y = \sqrt{2x - x^2}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
а) $y = \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{7}x^7$; б) $y = \ln(9 - x^2)$.
8. Знайти асимптоти функції:
а) $y = \frac{4x^2 - 2x - 5}{x + 11}$ б) $y = \frac{e^{x-4}}{x-3}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
а) $y = x^3 + x^2$; б) $y = \left(\frac{x-3}{x+3}\right)^2$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$$
на інтервалі $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Завдання 9.22.

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\sqrt{4,09}$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = 3x^2 - \frac{2}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = -1$.
- Записати рівняння дотичної до параболи $y = x^2 - 5x - 8$ в точці перетину її з віссю ординат.
- Вздовж осі абсцис рухаються прямолінійно дві матеріальні точки, закони руху яких $s = 3t^2 - t + 14$ і $s = 2t^2 + 5t + 9$. З'ясувати, з якою швидкістю віддаляються матеріальні точки в момент зустрічі.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$;	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{5x^2 - 3x + 4}{x - 1} - 5x \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1 - x) \cos \frac{\pi x}{2}$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{ctg^2 x}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = 3x^4 - 4x^3 - 7$;	б) $y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$.
----------------------------	---------------------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = 4x^4 - 8x^2 + 5x$;	б) $y = (x + 2)e^{x+2}$.
-----------------------------	---------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x}$	б) $y = 5 \ln \frac{x-2}{x} - 4$.
---	------------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = x^3 - 9x$;	б) $y = x^3 e^{-x}$.
---------------------	-----------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{1 + \ln x}{x}$$
 на інтервалі $\left[\frac{1}{e}; e \right]$.

Завдання 9.23.

1. Знайти наближене значення функції $y = (x^2 + 9)e^{-x}$ при $x = 0,01$.
2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \frac{2}{3}\sqrt{x} - 5$ в точці з абсцисою $x_0 = 9$.
3. На кривій $y = 7x^2 - 14x + 25$ знайти точку, в якій нормаль паралельна прямій $y = -x + 3$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 + 5t^3 - 7t^2 + 3t - 4$. Обчислити швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 5$ с.
5. Обчислити границі функцій:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 5^{\sin x}}{x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot \sin \frac{13}{x} \right)$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 + x^2}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
а) $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$; б) $y = \ln(1 - x^2)$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; б) $y = \left(\frac{x+3}{x-3} \right)^2$.
8. Знайти асимптоти функції:
а) $y = \frac{7x^2 - 7x - 4}{x+5}$ б) $y = \frac{e^{x-9}}{x-2}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
а) $y = 9x - x^3$; б) $y = \frac{4-x^2}{x^2+1}$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
 $y = 4 - e^{-x^2}$
на інтервалі $[0; 2]$.

Завдання 9.24.

- 242

Завдання 9.25.

- Знайти наближене значення функції $y = 2x^3 - 3x^2 + x \cdot e^x$ при $x = 0,02$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{x+5}$ в точці з абсцисою $x_0 = 3$.
- З'ясувати, який кут утворює з віссю Ox дотична до кривої $y = x - x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
- Вздовж осі абсцис рухаються дві матеріальні точки, закони руху яких задані рівняннями $s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 + 3t + 5$ і $s = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 8t - 9$. З'ясувати моменти часу, в яких їх швидкості були однаковими.
- Обчислити границі функцій:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x)}{x}$;
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^2 - 4} - 2x \right]$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln x$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{ctg^2 x}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - $y = 2x^4 + 8x + 6$;
 - $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + 2x^2 - 2$;
 - $y = 3 \ln \frac{x-6}{x}$.
- Знайти асимптоти функції:
 - $y = \frac{2x^2 + 5x + 3}{4x - 8}$
 - $y = \frac{e^{x-2}}{x-7}$.
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - $y = x^3 - 3x^2 - 18x$;
 - $y = \frac{x^2}{\ln x}$.
- Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$ на інтервалі $[-3; 1]$.

Завдання 9.26.

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\ln 0,99$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = \cos 2x$ в точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{12}$.
- Відомо, що пряма $y = 7x + 4$ є дотичною до графіку функції $y = \frac{1}{4}x^4 - x$. Знайти координати точки дотику.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 + \frac{7}{3}t^3 - 9t^2 + t - 11$. Визначити швидкість та прискорення руху матеріальної точки через $t = 4$ с.
- Обчислити границі функцій:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + e^{-3x} - 2}{x^2}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right]$;
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \cos 3x) \operatorname{ctg} 5x$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - $y = x^3 - 6x^2$;
 - $y = (x + 4)e^{x-2}$.
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - $y = x^4 - 96x^2 + 315$;
 - $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$.
- Знайти асимптоти функції:
 - $y = \frac{8x^2 - 2x - 6}{x^2 - 36}$
 - $y = 8 \ln \frac{x-2}{x-4} + 3$.
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$;
 - $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$$
 на інтервалі $\left[\frac{1}{4}; 4 \right]$.

Завдання 9.27.

1. Знайти наближене значення функції $y = x^3 \cdot \ln x$ при $x = 0,1$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{x+3}$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
3. Знайти кут нахилу до осі абсцис дотичної до кривої $y = \frac{1}{4}x^4 + 4$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 9$. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.
5. Обчислити границі функцій:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \ln(1+x)}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{4x^2 + 3x - 1}{x - 9} - 4x \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 \cdot e^{-9x})$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x + e))^{\frac{1}{x}}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
а) $y = x^3 - 45x + 27$; б) $y = \sqrt{x}(x^2 - 5)$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - 2x + 10$; б) $y = \frac{x^2}{\ln x}$.
8. Знайти асимптоти функції:
а) $y = \frac{9x^2 + x + 6}{3x - 5}$ б) $y = \frac{e^{x-6}}{x-2}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
а) $y = 4x^3 + 2x^2$; б) $y = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
 $y = \ln(\cos x)$
на інтервалі $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Завдання 9.28.

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $15^{0,25}$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3$ в точці з абсцисою $x_0 = 6$.
3. Записати рівняння горизонтальної дотичної до параболи $y = 3x^2 - 6x + 5$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{9}{3}t^3 + 13t^2 - t + 2$. Визначити швидкість та прискорення руху матеріальної точки через $t = 3$ с.
5. Обчислити границі функцій:
а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln(e^{x^2} + 1)}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\ln(x-2)} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(1-x)$ г) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(tg \frac{\pi x}{4} \right)^{tg \frac{\pi x}{2}}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
а) $y = 2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$; б) $y = \frac{3x^2-6}{3-2x}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
а) $y = x^4 - 24x^2 + 12x$; б) $y = (3x-4)e^{x+1}$.
8. Знайти асимптоти функції:
а) $y = \frac{x^2-x+12}{x^2-2x}$ б) $y = 4 \ln \frac{x}{x+5} - 7$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
а) $y = 3x^4 - 12x^3$; б) $y = \frac{x}{e^x}$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
 $y = \sqrt{169 - x^2}$
на інтервалі $[-12; 5]$.

Завдання 9.29.

1. Знайти наближене значення функції $y = (1 - x^2)^{0,5}$ при $x = 0,01$.
2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x + 8}$ в точці з абсцисою $x_0 = -7$.
3. З'ясувати, в яких точках дотична до графіку функції $y = \frac{x-8}{x+8}$ утворює з віссю абсцис кут $\frac{\pi}{4}$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = t^3 - 12t^2 + 45t - 96$. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.
5. Обчислити границі функцій:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - x}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{\ln 2x} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{3x}) \operatorname{ctg} 2x$ г) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^{\ln x}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 7x + 4$; б) $y = x + \frac{1}{x}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
а) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$; б) $y = \frac{\ln x}{x}$.
8. Знайти асимптоти функції:
а) $y = \frac{3x^2 - 2x - 7}{x + 4}$ б) $y = \frac{e^{x+1}}{x+9}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
а) $y = x^3 - 25x$; б) $y = \ln(1 - x^2)$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
 $y = x - 2\sin x$
на інтервалі $[0; \pi]$.

Завдання 9.30.

1. За допомогою знахідної функції знайти наближене значення $\arcsin 0,54$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{18}{x} - 3\sqrt{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 9$.
3. Довести, що дотична до синусоїди $y = \sin x$ в точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{2}$ паралельна осі Ox .
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - 3t^2 + 2t - 1$.
Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 5$ с.
5. Обчислити границі функцій:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{tg x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x tg x} - \frac{1}{x^2} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^4 \cdot \sin \frac{2}{x^4} \right)$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x))^{sin x}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
а) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 12x - 15$; б) $y = \frac{2x}{1+x^2}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
а) $y = 8x^3 - 3x^4$; б) $y = (x+4)e^{x-4}$.
8. Знайти асимптоти функції:
а) $y = \frac{2x^2 - 4x + 9}{x^2 - 6x}$ б) $y = \ln \frac{x+8}{x} - 4$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
а) $y = 15x - 5x^3$; б) $y = x^2 \cdot e^{-x}$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$y = \frac{1}{x} + 4x^2$$

на інтервалі $\left[\frac{1}{2}; 2 \right]$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб.: Лань, 2003. – 736 с.
2. Валеев К. Г. Вища математика: У 2 ч. Ч.1. / К. Г. Валеев, І. А. Джалладова. – Київ: КНЕУ, 2001. – 546 с. Ч.2. – Київ: КНЕУ, 2002. – 451 с.
3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн / За ред. Г. Л. Кулініча. – Київ: Либідь, 2003. Кн.1. Основні розділи. – 400 с. Кн.2. Спеціальні розділи. – 368 с.
4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. – Москва : Наука, 1985.
5. Станішевський С.О. Вища математика. – Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.
6. Станішевський С.О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв'язання (Модуль 1) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків: ХНАМГ, 2010. – 88 с.
7. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв'язання (Модуль 2) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків: ХНАМГ, 2010. – 125 с.
8. Станішевський С.О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв'язання (Модуль 3) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків: ХНАМГ, 2010. – 110 с.
9. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. : Наука, 1985. – 383 с.
10. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М. : Наука, 1968. – 336 с.
11. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків: ХНАМГ, 2010. – 424 с.
12. Коваленко Л.Б. Вища математика. Модуль 1 : навч. посібник/ Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015.–255 с

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
Тема 1. Визначники. Матриці	4
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 1 ...	9
Тема 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.	39
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 2 ...	44
Тема 3. Вектори	59
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 3 ...	64
Тема 4. Аналітична геометрія на площині. Пряма лінія ...	69
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 4 ...	82
Тема 5. Аналітична геометрія на площині. Лінії другого порядку	99
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 5 ...	105
Тема 6. Аналітична геометрія у просторі	135
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 6 ...	140
Тема 7. Теорія границь	148
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 7 ...	153
Тема 8. Обчислення похідних	168
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 8 ...	177
Тема 9. Застосування похідних	207
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми 9 ...	219
СПИСОК ДЖЕРЕЛ	249

Навчальне видання

КОВАЛЕНКО Людмила Борисівна
СТАНІШЕВСЬКИЙ Степан Олександрович

**ЗБІРНИК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

Модуль 1

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*

Підп. до друку 18.06.2015
Друк на різнографі
Зам. №

Формат 60*84/16
Ум. друк. арк. 6,0
Тираж 300 пр.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 4705 від 28.03.2014 р.

